５．材料力学

材料力学では、材料（物体、機械部品）に力が働いたときの材料の変形の度合い、およびどのくらいの力が働いたときに材料が破壊するか（破断するか）を調べる。

材料に働く力として、引張荷重、圧縮荷重、せん断荷重、曲げ荷重、ねじり荷重などがある。引張荷重、圧縮荷重は材料の断面に対して垂直方向にかける荷重で、せん断荷重は断面に対して平行方向にかける荷重である。圧縮荷重は負の引張荷重と考えることができる。また、曲げ荷重は曲げのモーメントとして、ねじり荷重はねじりのモーメント（もしくはトルク）として考えることができる。

材料に力が働いた時の力の大きさの度合いは材料の大きさによって異なることから、単に力の大きさではなく、単位面積あたりの力によって評価する。これを応力という。応力 σ は、力を F、断面積を S とすると $\sigma = F / S$ で求められる。
応力の単位として Pa が使われる（SI 単位系）。$1\ Pa = 1\ N / 1\ m^2$ 。
一般的に MPa が使われる　　$1\ MPa = 1000000\ Pa \fallingdotseq 0.1\ kgf / mm^2$ 。

材料に引張荷重（圧縮荷重）が働いているときには引張応力が生じる。

荷重による材料の変形の度合いは材料の大きさによって異なることから、単に変形量（伸び）ではなく、単位長さあたりの変形量（寸法の変化）によって評価する。これをひずみという（厳密には、後述の縦ひずみ)。

引張荷重によって生じるひずみ ε は、元の長さを L、寸法の変化を δ とすると $\varepsilon = \delta / L$ で求められる。
ひずみには単位はない（無次元数、m / m ）。

材料にせん断荷重が働いているときにはせん断応力が生じる。
せん断応力 τ は、せん断荷重を Q、断面積を S とすると $\tau = Q / S$ で求められる。

せん断荷重によって生じる単位長さあたりの変形量（ずれ）をせん断ひずみといい、せん断ひずみ γ は、変形長さを L、変形量（ずれ）を δ とすると $\gamma = \delta / L$ で求められる。

材料の強度は引張試験によって評価される。その評価には、横軸にひずみ、縦軸に応力をとった応力－ひずみ曲線が使われる。

一般的に、材料に引張荷重をかけると、あるところまでは応力はひずみに比例する。この上限を比例限という。
比例限以上の荷重をかけると、荷重を除去したときに元の寸法に戻どらなくなる上限があ

る。この点を弾性限という。弾性限以下の荷重（応力）では、荷重を除くと元の寸法に戻る。このような変形を弾性変形という。
弾性限以上の荷重をかけると荷重を除いたときに元の寸法に戻らなくなる。このような変形を塑性変形という。塑性変形して寸法が元に戻らなくなったときの変形量（ひずみ）を永久ひずみという。0.2%の永久ひずみが生じる応力を耐力という。
耐力以上の荷重をかけると応力はある点でピークとなる。この点を引張強さという。
引張強さ以上の荷重をかけるとある点で破断する。この点を破断点という。
機械部品の設計において、引張強さ以上の応力をかけると破断すると考えて設計する。

比例限以下では応力とひずみは比例する。その比例係数を縦弾性係数（ヤング率）という。
応力を σ、ひずみを ε、縦弾性係数を E とすると $\sigma = E\varepsilon$ となる。
縦弾性係数は炭素鋼でおおよそ E=200GPa、アルミニウムでおおよそ E=70GPa、銅でおおよそ E=100GPa となる（合金も同程度）。

材料を応力－ひずみ曲線の挙動で分類すると、材料によって、塑性変形をする材料と、ほとんどしない材料に分けられる(何らかの図を参照)。塑性変形する材料を延性材料といい、延性材料として鋼、アルミ合金、銅合金などがある。また塑性変形をほとんどしない材料を脆性材料といい、脆性材料として、鋳鉄やセラミックス、ガラスなどがある。

低炭素鋼（軟鋼）においては、弾性限以上の荷重をかけると、ある点で応力はほとんど変化せずひずみだけが増加する現象が生じる。この現象を降伏といい、この時の応力を降伏応力という。降伏が発生すると、降伏応力はわずかに減少する。減少する前の応力を上降伏点、減少した後の応力を下降伏点といい、特に区別しないときは上降伏点を降伏応力とする。

せん断荷重においても、比例限以下ではせん断応力とせん断ひずみは比例する。その比例係数を横弾性係数（剛性率）といい、せん断応力を τ、せん断ひずみを γ、縦弾性係数を G とすると $\tau = G\gamma$ となる。

材料に曲げ荷重が働いているときには材料内部には引張応力（圧縮応力）が、ねじり荷重が働いているときにはせん断応力が生じる。

材料に引張荷重をかけると縦方向には伸び、横方向には縮む。単位長さあたりの縦方向の伸びを縦ひずみ、横方向の縮みを横ひずみという。
縦ひずみと横ひずみの割合をポアソン比と言いい、ポアソン比を ν、縦ひずみを ε_y、横ひずみを ε_xとすると、$\nu = \varepsilon_x / \varepsilon_y$ で求められる。

機械設計において、変形しないもしくは破断しないようにするため、ある程度の余裕を持った設計を行う。強度計算において、強度の限界の強さを基準の強さ、余裕を安全率、設

計上の許される応力の上限を許容応力という。基準の強さを σ 、安全率を s、許容応力を σf とすると、 σf=σ/s で求めることができる。
基準の強さとして、破断が許されない場合は引張強さが、変形が許されない場合は降伏応力（もしくは耐力）が用いられる。
安全率は、静荷重では 3 程度、動荷重では 5 程度を採用する（材料や条件によって異なる）。

材料の破壊の種類として、静荷重による破壊、衝撃破壊、クリープ破壊、繰り返し荷重による疲労破壊などがある。
静荷重による破壊では延性材料と脆性材料で異なり、延性材料は大きな塑性変形を起こしたのちに破断し、脆性材料では塑性変形をほとんど起こさずに破断する。
衝撃破壊は衝撃荷重による破壊で、延性材料は衝撃には強く、脆性材料は衝撃に弱い。
クリープ破壊は、高温において長期間材料に一定の荷重を加えておくことにより、ひずみが時間と共に徐々に増加して破壊に至るもので、引張強さよりも低い応力で破壊する。
疲労破壊は、材料に繰り返し荷重が作用して破壊に至るもので、静荷重による破壊よりも小さな荷重で破壊する。
金属材料に繰り返し荷重が作用すると、破断限以下の応力であっても破断に至ることがある。この現象を金属疲労という。鉄鋼材料の場合、かかる繰り返し荷重による応力がある応力以下であると疲労破壊を起こさなくなる。この時の応力を疲労限という。疲労限は、作用する繰り返し荷重の種類によって異なる（曲げ、ねじり、片振り、両振りなど）。

材料の形状が大きく変わる部分や、傷や亀裂の先端部分では、局所的に平均的な応力の 3 倍の応力が生じる。この現象を応力集中という。

材料に熱を加えると膨張する。ぼの膨張の度合いを表したものを線膨張係数という。材料の長さを l、温度変化を⊿t、長さの変化（膨張した長さ）を⊿l、線膨張係数を α とすると、長さの変化は ⊿l = lα⊿t で表される。なお、線膨張係数の単位は /k となる。

材料力学において、細長い材料をはりという。材料力学では、はりに力やモーメントが作用したときに、どの程度変形するか（変形量、たわみ）、また、どの程度の応力（曲げ応力）が生じるのかを調べる。最大曲げ応力が耐力（降伏応力）を超えるとはりは塑性変形し、引張強さを超えるとはりは破断する。
はりのたわみや曲げ応力を求めるためには、まず反力や反モーメントを求め、次にせん断力、そして曲げモーメントを求めればよい。
はりを支える方法として、支持、固定などがある。支持点では支えている点は移動はしないが回転はし、固定点では支えている点は移動も回転もしない。はりとして、両端が支持されている両端支持ばり、片端が固定されいる片端固定はり（一般的には片持ちはり）、両端が固定されている両端固定ばりなどがある。
はりに力およびモーメントが作用すると、支持点では反力が、固定点では反力および反モーメントが作用する。

はりに外部から作用する荷重として、ある一点だけに働く集中荷重、ある範囲で働く分布荷重がある。
はりは、その断面形状によって曲がりやすさが異なる。この曲がりやすさのことを断面二次モーメントという。

両端支持はり、および片端固定はり（片持ちはり）では、はりに力やモーメントが働いたとき、力のつりあいとモーメントのつりあいで支持点に働く反力、また固定点にはたらく反力・反モーメントを求めることができる。
両端固定はりでは、力のつり合いとモーメントのつり合いだけでたわみを求めることはできない。二つのつりあいの式に加え、たわみの連続性、たわみ角の連続性から、両方の固定点に働く反力・反モーメントを求める。このようなはりを不静定はりという。
はりに分布荷重が働いているときは、微小領域に働く微小の力を積分することによって、反力・反モーメントを求めることができる。

はりに力やモーメントが働いているとき、はり内部にはせん断力および曲げモーメントが働く。任意の点 x ではりを切断したとき、切断した左側のはりの断面には下向きのせん断力と反時計回りの曲げモーメントが、右側のはりの断面には上向きのせん断力と時計回りの曲げモーメントが働いていると考える。せん断力および曲げモーメントは、切断した時の左側（もしくは右側）のつり合いの式から、はりの端からの距離 x の関数として求めることができる。
はりに生じるせん断力および曲げモーメントを表す図として SFD、BMD が使われる。

はりの曲げにくさを表すものとして断面二次モーメントがある。

$$I = \int y^2 \, dA \qquad I：断面二次モーメント$$

はりに力やモーメントが働くと、はりの内部には曲げ応力が生じる。正確には、曲げられた内側には圧縮応力が、外側には引張応力が連続的に生じる。このときの応力が生じない点を中立点（中実軸）という。
はりに生じる曲げ応力を σ、曲げモーメントを M、断面二次モーメントを I、中立軸からの距離を y とすると、σ は次式で表される。

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

最大曲げ応力を求めるときは、一般的に断面係数 $z = I / y_{max}$ が使われる。

$$\sigma_{max} = \frac{M}{z}$$

はりのたわみを y とすると、次式のような関係がある（たわみの基本式）

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

ここから、たわみ角 θ は次式で表される。

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\int \frac{M}{EI}\,dx$$

また、たわみ y は次式で表される。

$$y = -\iint \frac{M}{EI}\,dxdx$$

棒（主に中実丸棒もしくは中空丸棒）に外部からねじりモーメント（トルク）が作用すると、棒の固定端には反モーメントが作用し、棒がねじれる。
棒がねじれると、棒の断面にはせん断応力が生じる。最大せん断応力が耐力（降伏せん断応力）を超えると棒は塑性変形し、最大せん断応力を超えると棒は破断する。

棒のねじれにくさを表すものとして断面二次極モーメントがある。

$$I_p = \int r^2\,dA \qquad I_p：断面二次極モーメント$$

棒に生じるせん断応力を τ 、半径方向のねじれ角を φ、棒の長さを l、棒の半径を r、棒の横弾性係数を G とすると、
せん断応力は

$$\tau = G\gamma = \frac{G\varphi r}{l}$$

トルク T は

$$T = \int r\tau dA = \int \frac{G\varphi}{l} r^2\,dA = \frac{G\varphi}{l}\int r^2\,dA = \frac{G\varphi}{l} I_p$$

これらの式から τ を T を使って表すと

$$\tau = \frac{G\varphi r}{l} = \frac{T}{I_p}\,r$$

また、φ を T を使って表すと

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$$

で求められる。

棒のねじれでは、比ねじれ角 θ が使われる。　　$\theta = \varphi / l$
比ねじれ角 θ は、

$$\theta = \frac{T}{GI_p}$$

で求められる。
（比ねじれ角は、はりの曲げのたわみの基本式に対応している）

棒が一定角速度 ω で回転し、その時の負荷トルクを T とするとき、動力 P は

$$P = T\omega$$

で求められる。

なお、動力の単位換算において 1PS = 735W となる。