４．解析学（微分積分学）

1)微分

微分を表す式の記述　$y=f(x)$ → $dy/dx = df(x)/dx= d/dx\ f(x) = y' = (f(x))'=f\ '(x)$、

$d/dx(C)=0$、$d/dx(x^n)=nx^{n-1}$ 、$d/dx(\sin x) =\cos x$、$d/dx(\cos x)=-\sin x$、$d/dx(e^x)=e^x$、

$d/dx(\ln x)=1/x$、$d/dx(\log_a x)=d/dx(\ln x/\ln a)=1/\ln a\cdot d/dx(\ln x)=1/\ln a\cdot 1/x=1/(x\ln a)$

線形性　$y=f(x)$、$z=g(x)$において

定数倍の微分　$d/dx(k\cdot f(x)) = k\cdot d/dx\ f(x)$、　　注）$d/dx(f(kx))\neq k\cdot d/dx\ f(x)$

和の微分　$d/dx(f(x)+g(x))= df(x)/dx + dg(x)/dx$

積の微分　　$y=f(x)$、$z=g(x)$において　$y\cdot z= f(x)g(x)$　を微分する

$d/dx(f(x)g(x))= df(x)/dx\ g(x)+ f(x)dg(x)/dx$

合成関数の微分　$y=f(x)$、$x=g(t)$のとき、$y=f(g(t))$

$dy/dt = dy/dx\cdot dx/dt$

もしくは　　$y=f(x)$で、$u=g(x)$とし　$y=f(x)=h(u)$とおけるとき

$dy/dx = dy/du\cdot du/dx = dh(u)/du\cdot dg(x)/dx$　　重要：この方が一般的

媒介変数による微分　$y=f(t)$、$x=g(t)$のとき

$dy/dx = dy/dt\ /\ dx/dt$

接線の傾き　$y=f(x)$において

$dy/dx = f\ '(x)$ →　微分係数 $f\ '(a)$は、$x=a$ での接線の傾きになる

$dy = f\ '(x)\ dx$　とすることができる

偏微分　$z=f(x,y)$において

$\partial z/\partial x = \partial/\partial x\cdot f(x,y)$　･･･ y を定数とみなし、x で微分する（偏微分する）

$\partial z/\partial y = \partial/\partial y\cdot f(x,y)$　･･･ x を定数とみなし、y で微分する（偏微分する）

$z=x^3y^2+x^4\sin(y)$　のとき、$\partial z/\partial x = 3x^2y^2+4x^3\sin(y)$　, $\partial z/\partial y = 2x^3y+x^4\cos(y)$

（∂：デル、ラウンドディー、ディー、パーシャル・・・）

2)積分

$\int Cdx=Cx$、$\int x^n\,dx = 1/(n+1)\ x^{n+1}$ 、$\int 1/x dx = \int x^{-1}\,dx=\log|x|$

$\int \sin x\,dx = -\cos x$　、　$\int \cos x\,dx = \sin x$　、　$\int e^x\,dx = e^x$

$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x$

$\int \log_a x\,dx = \int \ln x / \ln a\,dx = 1 / \ln a\cdot \int \ln x\,dx = (x\ln x - x) / \ln a$

線形性　$y=f(x)$、$z=g(x)$において

$\int (k\cdot f(x))\,dx = k\int f(x)\,dx$、　　注）$\int (f(kx))\,dx\neq k\int f(x)\,dx$

$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

積の積分（部分積分）　　　$y=f'(x)$、$z=g(x)$において　$y\cdot z= f'(x)g(x)$　を積分する

$\int f\ '(x)g(x)\,dx =f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

もしくは　　$y=f(x)$、$z=g(x)$において　$y\cdot z= f(x)g(x)$　を積分する

$\int f(x)g(x)\,dx = \int f(x)\,dx\ g(x) - \int (\int f(x)\,dx)g'(x)\,dx$

(積分そのままー∫積分微分 dx)

置換積分（合成関数の積分）

$y=f(x)$、$x=g(t)$のとき、$y=f(g(t))$ 、$dx/dt=dg(t)/dt=g'(t)$、$dx=g'(t)\,dt$、

$\int f(x)dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$

置換積分（この考えの方が使う）

$y=f(x)$、$u=g(x)$とし、$y=f(x)=h(u)$とおけるとき 、$du/dx=g'(x)$、$dx=1/g'(x)\cdot du$

$\int f(x)dx = \int h(u)dx = \int h(u)\cdot 1/g'(x)\cdot du$

ただし、$g'(x)$が定数もしくは x が消去できること

例：$y=x\sin(kx^2)$のとき。$u=kx^2$ とすると $y=x\sin(u)$　、$du/dx=2kx$、$xdx=1/2k\cdot du$

$\int ydx=\int x\sin(kx^2)dx=\int\sin(kx^2)\cdot\ xdx=\int\sin(u)\cdot 1/2k\cdot du=1/2k\int\sin(u)du$

$=-1/2k\cdot\cos(u)=-1/2k\cdot\cos(kx^2)$

重積分

$\int(\int f(x,y)dx)dy$　（関数 $f(x,y)$を x で積分し、その後 y で積分する）

→　$\iint f(x,y)dydx$　　・・・　∫(y の積分範囲)∫(x の積分範囲)$f(x,y)dydx$

3)微分方程式

微分積分の入った等式

例　$md^2x/dt^2+cdx/dt+kx=f(t)$、$LdI/dt+RI+1/C\int Idt=V(t)$

解き方は色々あり、複雑なものはフーリエ変換、ラプラス変換などを使って解く。

右辺=0 の微分方程式は斉次微分方程式と呼ばれ、解くのは容易（一般解を求めれば良い）

右辺≠0 の微分方程式は非斉次微分方程式と呼ばれ、解くのは容易ではない（まず斉次式の一般解を求め、次に非斉次式の特殊解を求める。それらの和が解となる)。

まずは斉次微分方程式の解法について説明する

1 階微分方程式の解法

・$dy/dx=f(x)$　　両辺、x で積分

・$ady/dx+by=0$　　$1/y\cdot dy=-b/a\cdot dx$　両辺を積分して　$\ln y=-b/a\cdot x+c$　　$y=k\exp(-b/a\cdot x)$

・$dy/dx=f(x)/g(y)$　　変数ごとに集めて、両辺積分

2 階微分方程式の解法

微分方程式の（右辺）＝0　を斉次 2 階微分方程式、（右辺）≠0　を非斉時・・・という。

まず、斉次 2 階微分方程式を解く。

$md^2x/dt^2+cdx/dt+kx=0$　　ここで $x=ae^{st}$ とおく

$cdx/dt=case^{st}$ 、$md^2x/dt^2=mas^2e^{st}$　より　$ms^2ae^{st} + csae^{st} + kae^{st} =0$

$e^{st}\neq 0$ より　右辺を$=ae^{st}$で割るると、　$ms^2+cs+k=0$　この解をα、βとすると、

$x=k1e^{\alpha t}+k2e^{\beta t}$　となる　なお重解の場合　$x=(k1+k2t)e^{\alpha t}$

また、s が複素数のとき（$s=\gamma\pm i\omega$）　$x=k1\,e^{\gamma t}\sin(\omega t+\varphi)$ となる

非斉時式の解き方は　予式を満たす式が一つだけ見つけられれば良い、右辺 $f(x)$として様々な式を仮定し、予式が満たされればそれが特殊解となる。斉次式の一般解と特殊解の和が非斉次式の一般解となる。

$y=A$ と仮定、$y=Ax$ と仮定、$y=Ax+B$ と仮定、$y=Ax^2$ と仮定・・・・

$y=A\exp(kx)$ と仮定　　、$y=A\sin(kx)+B\cos(kx)$と仮定。