３．制御モデル

（１）ラプラス変換

自動制御システムの解析

自動制御システムは、制御要素を組み合わせたもので近似できる。

制御要素の入力と出力の関係が数学的に求められているので、システム全体の入出力の関係を求めれば、最適な制御システムにすることができる。

入力をx、出力をyとすると、システムの入出力の関係は例えば

$$y = \frac{(mx'+dx+k\int xdt)\cdot(s+rx')}{1+(ay''+by'+cy)\cdot(mx'+dx+K\int xdt)}$$

この微分方程式を解けばよい。

➡ このままで解を求めるのは非常に困難（不可能）

ラプラス変換法

複雑な微分方程式を解く解法の一つとして
・・・ラプラス変換法

元の微分方程式をラプラス変換し、代数的に解き、その結果を逆ラプラス変換して微分方程式を解く

ラプラス変換の定義

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

ｓは複素数

実際は、元の微分方程式を式変形し、ラプラス変換表を使ってラプラス変換する

ラプラス変換による微分方程式の解法

ラプラス変換を使って微分方程式を解く

$$x(t) = a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + cy(t)$$

①与えられた微分方程式をラプラス変換する

$$X(s) = as^2Y(s) + bsY(s) + cY(s)$$
$$= (as^2 + bs + c)\,Y(s)$$

②代数的に計算する

入力 $x(t)$ が単位ステップ入力（＝１）のとき

$X(s)=1/s$　　ラプラス変換表より

$$Y(s) = \frac{1}{(ms^2+cs+K)s} = \frac{n1}{s-m1} + \frac{n2}{s-m2} + \frac{n3}{s}$$

ラプラス変換による微分方程式の解法（続き）

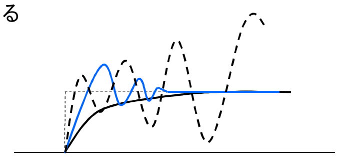
ただし、$m1$、$m2$は　as^2+bs+c　の解

$n1+n2+n3=0$、$-b1a2-b2a1-b3(a1+a2)=0$、$a1a2b3=1$

③逆ラプラス変換する

$$y(t)=b1\,e^{-a1t} + b2\,e^{-a2t}+b3$$

a1、a2、b1、b2、b3の値によりｙ(t)は以下の３パターンのように変化する



（２）伝達関数

関数論の基礎

２次方程式の解の公式

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

判別式		
	D＞０	二つの異なる実数解
	D＝０	重解
	D＜０	二つの異なる虚数解

オイラーの公式

$$y=e^{i\theta}=\cos\theta+i\cdot\sin\theta$$

伝達関数

自動制御システムにおいて、入力と出力の関係を数式（微分方程式）で求めることが出来た。
その微分方程式をラプラス変換により解き、システムの特性を求める。

ラプラス変換した入力と出力の割合を**伝達関数**

x（t）→ 微分方程式 → y（t）

⇩ ラプラス変換

X (s) → G (s) → Y (s)

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=G(s)$$ ・・・伝達関数

各制御要素の伝達関数

自動制御システムは、これらの要素を組み合わせて近似することができた

1) 比例要素
2) 積分要素
3) 微分要素
4) むだ時間要素
5) 一次遅れ要素
6) 二次遅れ要素

それぞれの要素をラプラス変換して、伝達関数を調べる

比例要素の伝達関数

比例要素は以下の式で表すことができた

$y(t)=K_p\cdot x(t)$　　　Kp：比例ゲイン

これをラプラス変換して伝達関数を求めると

$$Y(s)=K_p\cdot X(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=K_p$$

X (s) → Kp → Y (s)

積分要素の伝達関数

比例要素は以下の式で表すことができた

$y(t)=K_i\int x(t)\,dt$　　　Ki：積分ゲイン

これをラプラス変換して伝達関数を求めると

$$Y(s)=K_i\cdot\frac{1}{s}X(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K_i}{s}$$

X (s) → $\frac{K_i}{s}$ → Y (s)

微分要素の伝達関数

微分要素は以下の式で表すことができた

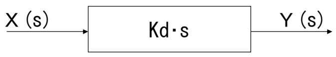
$$y(t)=Kd\frac{dx(t)}{dt}$$

Kd：微分ゲイン

これをラプラス変換して伝達関数を求めると

$$Y(s)=Kd\cdot s\,X(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=Kd\cdot s$$



むだ時間要素の伝達関数

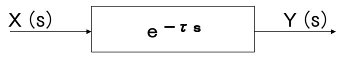
むだ時間要素は以下の式で表すことができた

$$y(t)=x\ (t-\tau)$$

これをラプラス変換して伝達関数を求めると

$$Y(s)=e^{-\tau s}X(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=e^{-\tau s}$$



一次遅れ要素の伝達関数

一次遅れ要素は以下の式で表すことができた

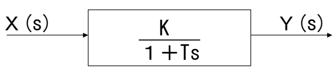
$$x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+b\,y(t)$$

これをラプラス変換して伝達関数を求めると

$$X(s)=aY(s)\cdot s+bY(s)=(as+b)\ Y(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{b+as}=\frac{K}{1+Ts}$$

K=1/b　ゲイン定数
T=a/b　時定数



二次遅れ要素の伝達関数

二次遅れ要素は以下の式で表すことができた

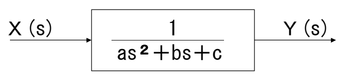
$$x(t)=a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+c\,y(t)$$

これをラプラス変換して伝達関数を求めると

$$X(s)=a\cdot s^2Y(s)+b\cdot sY(s)+cY(s)$$

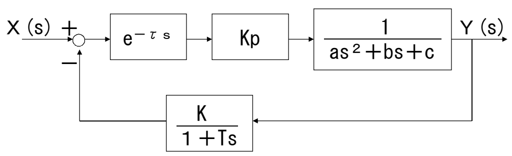
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{as^2+bs+c}=K\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$\omega_n=\sqrt{c/a}$ ：固有角振動数　　$\zeta=b/2\sqrt{ac}$ ：減衰比
K=1/C：ゲイン定数



自動制御システムの伝達関数

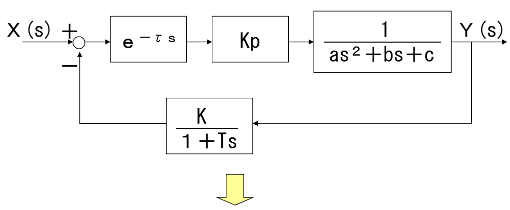
自動制御システムの伝達関数は、システムを構成する個々の伝達関数を求め、それらを組合わせて求めることができる。

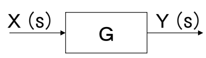


このような伝達関数を組合わせた図　　・・・ブロック線図

ブロック線図の簡略化

複雑な構成の自動制御システムでも、そのブロック線図を簡単にすることができる。ブロック線図を簡単にしてからラプラス変換法により、特性を容易に求めることができる。

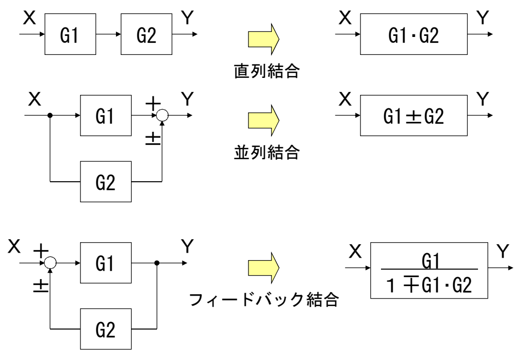




$$\frac{Y(s)}{X(s)}=G(s)=???$$

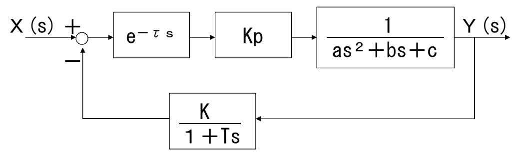
これを求める

伝達関数の結合



自動制御システムの伝達関数

自動制御システムの構成要素を求め、それらをラプラス変換し、伝達関数の結合を使って簡略化することにより、システム全体の伝達関数を求めることができる。



簡略化

G(s)＝・・・・・・・・