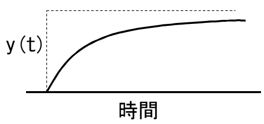
## （３）一次遅れ系、二次遅れ系

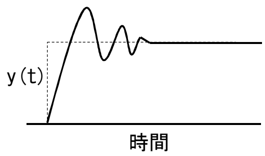
## 制御対象の伝達関数

最適な自動制御システムを作るために、まず制御対象の応答を知る必要がある。

多くの制御対象の伝達関数は、一次遅れ系、二次遅れ系で近似することができる。




一次遅れ系




二次遅れ系

このニつの要素の特徴について詳しく調べる

## 一次遅れ系のステップ応答

一次遅れ系のステップ応答を調べる

$$x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)$$

ラプラス変換して

$$G(s)=\frac{K}{1+Ts}$$

K=1/b　ゲイン定数
T=a/b　時定数

G(s)＝Y(s)/X(s)、　X(s)＝1/s　より

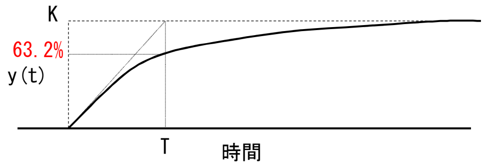
$$Y(s)=\frac{K}{1+Ts}\,\frac{1}{s}=\frac{-KT}{1+Ts}+\frac{K}{s}=\frac{-K}{1/T+s}+\frac{K}{s}$$

## 一次遅れ系のステップ応答

逆ラプラス変換して

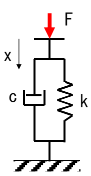
$$y(t)=-K\cdot e^{-1/T\cdot t}+K=K(1-e^{-t/T})$$

t=0での接線の傾きはK/T
t=Tでのyは 0.632K
t→∞でKに収束




## 一次遅れ系の例

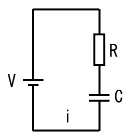
一次遅れ系の例　　$x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)$




F：力（入力）
x：変位（出力）

c·dx/dt+kx=F

変位と力



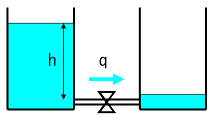

V：電圧（入力）
i：電流（出力）

$Ri+\frac{1}{C}\int idt=V$

流れる電流と電圧

## 一次遅れ系の例

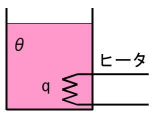
一次遅れ系の例　　$x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)$




q：流量（入力）
h：水位（出力）

C·dh/dt+kh=q

タンクの流量と水位




q ：熱（入力）
θ：温度（出力）

C·dθ/dt+kθ=q

熱とタンク流体の温度

## 二次遅れ系のステップ応答

二次遅れ系のステップ応答を調べる

$$x(t)=a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+cy(t)$$

$$G(s)=\frac{1}{as^2+bs+c}$$

$G(s)=Y(s)/X(s)$、　$X(s)=1/s$　より

$$Y(s)=\frac{1}{as^2+bs+c}\frac{1}{s}=\frac{k_1}{s-\alpha}+\frac{k_2}{s-\beta}+\frac{k_3}{s}$$

$\alpha$、$\beta$は　$as^2+bs+c=0$　の解
$k_1$、$k_2$、$k_3$は定数

これを解いて$y(t)$を求める

## 二次遅れ系のステップ応答

逆ラプラス変換して

$$y(t)=k_1e^{\alpha t}+k_2e^{\beta t}+k_3$$

$$\alpha、\beta=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{c}{a}\right)}$$

ここで、$b/2\sqrt{ac}=\xi$　減衰比

$\sqrt{c/a}=\omega_n$　固有角振動数

とおくと

$$\alpha、\beta=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

## 二次遅れ系のステップ応答

$\alpha$、$\beta$を　$y(t)=k_1e^{\alpha t}+k_2e^{\beta t}+k_3$　に代入すると

$$y(t)=k_1e^{(-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{(\xi^2-1)})t}+k_2e^{(-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{(\xi^2-1)})t}+k_3$$

ここで、

1) $\xi>1$のとき

$$-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-\omega_n(\xi-\sqrt{\xi^2-1})<0$$

$$-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-\omega_n(\xi+\sqrt{\xi^2-1})<0$$

より

$$y(t)=k_1e^{-\omega_n(\xi-\sqrt{\xi^2-1})t}+k_2e^{-\omega_n(\xi+\sqrt{\xi^2-1})t}+k_3$$

よって、出力は振動せずに$k_3$に収束する（過減衰）。

## 二次遅れ系のステップ応答

2) $\xi=1$のとき

$$-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-\xi\omega_n$$

$$-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-\xi\omega_n$$

重解の場合、$k_1e^{(-\xi\omega_n t)}$の他に$k_2te^{(-\xi\omega_n t)}$も解の一つになることから

$$y(t)=k_1e^{(-\xi\omega_n t)}+k_2te^{(-\xi\omega_n t)}+k_3$$

$$=(k_1+tk_2)e^{-\xi\omega_n t}+k_3$$

よって、出力は振動せずに$k_3$に収束する（臨界減衰）

## 二次遅れ系のステップ応答

3) $0<\xi<1$のとき

$$-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-\xi\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-\xi\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

ここで、$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$　とおくと　（減衰固有角振動数）

$$y(t)=k_1e^{(-\xi\omega_n+j\omega_d)t}+k_2e^{(-\xi\omega_n-j\omega_d)t}+k_3$$

$$=k_1e^{-\xi\omega_n t}(\cos(\omega_d t)+j\sin(\omega_d t))+k_2e^{-\xi\omega_n t}(\cos(\omega_d t)-j\sin(\omega_d t))+k_3$$

＝［省略］

$$=ke^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta)+k_3$$

よって、出力は周波数　$\omega_d/2\pi$で振動しながら$k_3$に収束する
（減衰振動）

## 二次遅れ系のステップ応答

4) $\xi=0$のとき

$$-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=j\omega_n$$

$$-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-j\omega_n$$

より

$$y(t)=k_1e^{j\omega_n t}+k_2e^{-j\omega_n t}+k_3$$

$$=k_1(\cos(\omega_n t)+j\sin(\omega_n t))+k_2(\cos(\omega_n t)-j\sin(\omega_n t))+k_3$$

$$=(k_1+k_2)\cos(\omega_n t+\theta)+k_3$$

よって、出力は周波数　$\omega_n/2\pi$　で振動し続ける
（不減衰振動）。

## 二次遅れ系のステップ応答

5) $-1<\zeta<0$のとき

$$-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

より

$$y(t)=k_1 e^{(-\zeta\omega_n+j\omega_d)t}+k_2 e^{(-\zeta\omega_n-j\omega_d)t}+k_3$$

$$=k_1 e^{-\zeta\omega_n t}(\cos(\omega_d t)+j\sin(\omega_d t))$$
$$+k_2 e^{-\zeta\omega_n t}(\cos(\omega_d t)-j\sin(\omega_d t))+k_3$$

＝［省略］

$$=k e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta)+k_3$$

$\zeta<0$より、出力は周波数$\omega_d/2\pi$で振動しながら発散する。

## 二次遅れ系のステップ応答

6) $\zeta=-1$のとき

$$-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n$$

$$-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n$$

より

$$y(t)=k_1 e^{(-\zeta\omega_n t)}+k_2 e^{(-\zeta\omega_n t)}+k_3$$
$$=(k_1+k_2)e^{-\zeta\omega_n t}+k_3$$

ここで$\zeta<0$ より出力は振動しないで発散する。
（振動しない限界点）

## 二次遅れ系のステップ応答

7) $\zeta<-1$のとき

$$-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=\omega_n(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})>0$$

$$-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=\omega_n(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})>0$$

より

$$y(t)=k_1 e^{\omega_n(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})t}+k_2 e^{\omega_n(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})t}+k_3$$

よって、出力は振動しないで発散する。

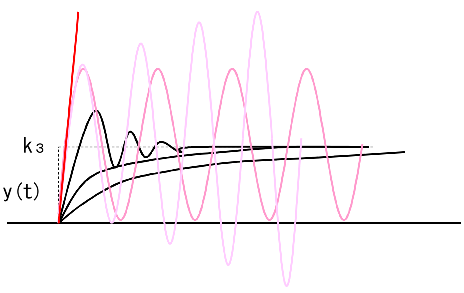
## 二次遅れ系のステップ応答

このように$\zeta$の値によって挙動が異なる

| | |
|---|---|
| $\zeta>1$ | 振動せずに$k_3$に収束･･･安定 |
| $\zeta=1$ | 振動せずに$k_3$に収束･･･安定（非振動限界） |
| $0<\zeta<1$ | 振動しながら$k_3$に収束･･･安定 |
| $\zeta=0$ | 振動し続ける･･･････不安定限界 |
| $-1<\zeta<0$ | 振動しながら発散･･･不安定 |
| $\zeta=-1$ | 振動せずに発散･･･不安定（振動限界） |
| $\zeta<-1$ | 振動せずに発散･･･不安定 |

## 二次遅れ系のステップ応答

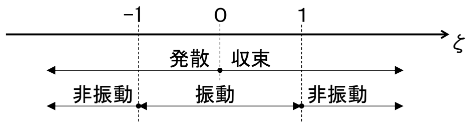
このように$\zeta$の値によって挙動が異なる




## 二次遅れ系のステップ応答

このとき　$\zeta>0$　Kに収束
$\zeta=0$　振幅Kの振動
$\zeta<0$　発散（無限大）

| | | | |
|---|---|---|---|
| また | $\zeta>1$、$\zeta<-1$ | 実数解 | （非振動） |
| | $\zeta=1$ | 重解 | （非振動） |
| | $-1<\zeta<1$ | 虚数解 | （振動） |



## 二次遅れ系の一般的な表現

一般的な二次遅れ系の伝達関数は

$$G(s)=\frac{1}{as^2+bs+c}\quad =K\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

$\zeta$：減衰比　、$\omega n$：固有角振動数　、K：ゲイン定数

で表すことが多い。

これは

$$G(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

の出力が１に収束するためである。

一般的に、これをゲイン定数K倍した式で表している。

## 二次遅れ系の別の表現

二次遅れ系の別の式として、以下の様な式がある

$$x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+b\ y(t)+c\int y(t)dt$$

これをラプラス変換すると

$$X(s)=\left(as+b+c\frac{1}{s}\right)Y(s)$$

伝達関数は

$$G(s)=\frac{1}{as+b+c\cdot 1/s}=\frac{s/a}{s^2+b/as+c/a}$$

$$=\frac{\gamma}{s-\alpha}+\frac{\delta}{s-\beta}\qquad \gamma+\delta=1/a,\quad \alpha\gamma+\beta\delta=0$$

## 二次遅れ系の別の表現

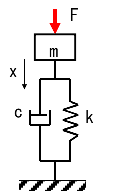
よって、

$$G(s)=\frac{1}{as^2+bs+c}$$

と同じ結果になる。（比例定数が異なるだけ）

## 二次遅れ系の例

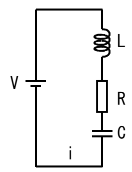
二次遅れ系の例　$x(t)=a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+cy(t)$




F：力（入力）
x：変位（出力）

$m\cdot d^2x/dt^2+c\cdot dx/dt+kx=F$

変位と力




V：電圧（入力）
i：電流（出力）

$L\cdot di/dt+Ri+\frac{1}{C}\int idt=V$

流れる電流と電圧