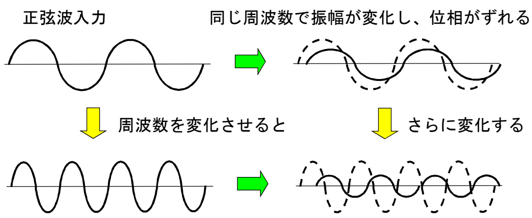
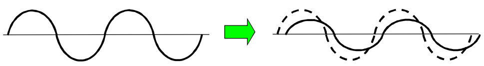
②周波数応答

周波数応答

自動制御システムに正弦波信号を入力したとき、システムの伝達関数によっては、入力に対する出力の特性（振幅、位相のずれ）が変化するものがある。
この特性の変化は、入力する周波数によって挙動が変る。



周波数応答



入力
$x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$

出力
$y(t) = B \cdot \sin(\omega t + \theta)$

振幅比$= \frac{B}{A}$

位相差$= \theta$

周波数（もしくは角周波数ω）の値によって振幅比、位相差が変化する。この度合いを調べる。

角周波数＝角速度

周波数伝達関数

伝達関数にsin曲線（x(t)=Asinωt）を入力する

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

$$= G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{K1}{s - s1} + \cdots + \frac{Kn}{s - sn} + \frac{C1}{s + j\omega} + \frac{C2}{s - j\omega}$$

ここでのjは虚数単位

これを逆ラプラス変換すると

$$y(t) = K1\, e^{s1\,t} + \cdots + K1\, e^{s1\,t} + C1\, e^{j\omega t} + C2\, e^{-j\omega t}$$

$= \cdots$ [省略]

$$= A|G(j\omega)|\sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

周波数伝達関数

このように、出力は伝達関数G(s)の s を jω で置き換えた式で表すことが出来る。

G(*jω*)：周波数伝達関数

一般的に、周波数伝達関数は

$G(j\omega) = \alpha + j\beta$

とあらわすことができる。　　α、βは実数

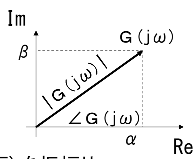
周波数伝達関数

$G(j\omega) = \alpha + j\beta$ を複素数平面で表すと

$|G(j\omega)| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(\beta/\alpha)$

となる。



|G(*jω*)|(＝出力の振幅/入力の振幅)を振幅比
また、g=20log|G(*jω*)| をゲインという

∠G(*jω*))（入力に対する出力の位相のずれ）を位相差という

α、βがω（角周波数）の関数であれば、
ωが変化すると振幅比や位相差が変化する。

周波数特性を表す線図

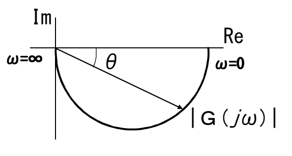
周波数特性（周波数の変化に対する振幅比もしくはゲイン、位相差の変化）を表す線図として

①ベクトル軌跡
入力の周波数の変化に対し、振幅比および位相のずれを極座標系で表す

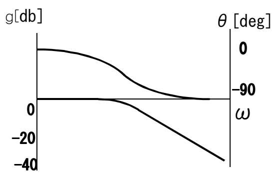
②ボード線図
入力の周波数を横軸に、ゲインおよび位相のずれ縦軸にとり、片対数グラフで表す

③ゲイン・位相図
入力の周波数の変化に対し、縦軸にゲイン、横軸に位相のずれをとり、グラフで表す

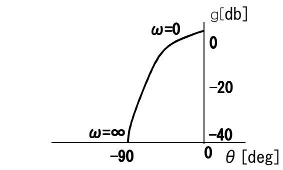
周波数特性を表す線図



ベクトル軌跡



ボード線図

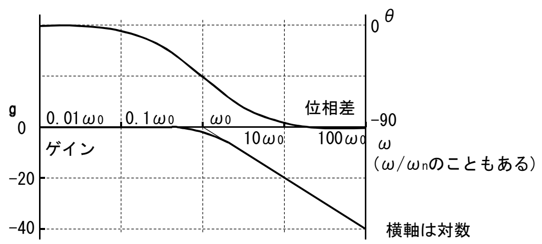


ゲイン・位相図

＊他に、ナイキスト線図やニコルス線図も使われる。

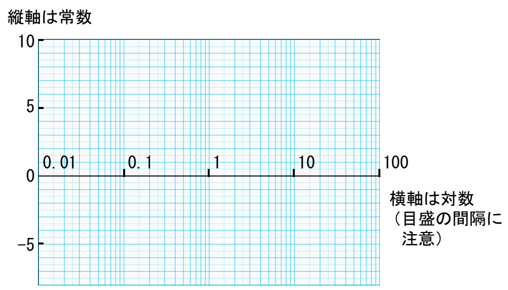
ボード線図

自動制御システムの動作を示す図。
周波数の変化によって、振幅比（ゲイン）、位相差がどのように変化するか。



参考：片対数グラフ

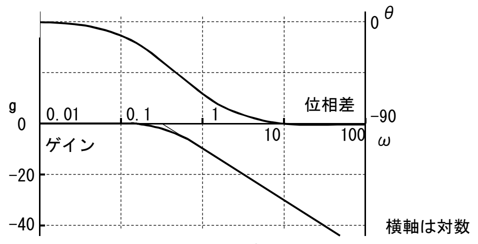
片対数グラフの特徴を示す



log0.01=-2、log0.1=-1、log1=0、 log10=1、log100=2

ボード線図によるシステムの解析

自動制御システムに正弦波を入力し、そのときの出力（振幅比（ゲイン）と位相差）からボード線図を作成し、ここから伝達関数のK、T（一次遅れ系）、もしくはK、ζ、ω_n （二次遅れ系）、などを求める。



一次遅れ系のボード線図

一次遅れ系のボード線図を求める。ゲインは

$$G(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega T}=\frac{K}{1+(\omega T)^2}(1-j\omega T)$$

$$|G(j\omega)|=\frac{K}{1+(\omega T)^2}\sqrt{1+(\omega T)^2}$$

$$=\frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}=K(1+(\omega T)^2)^{-1/2}$$

よって、

$$g(\omega)=20\log(G(j\omega)=20\log(K(1+(\omega T)^2)^{-1/2})$$

$$=20\log K-10\log(1+(\omega T)^2)$$

これは、$g(\omega)=-10\log(1+(\omega T)^2)$ のグラフを20logKだけ上下に平行移動させたグラフになる。

一次遅れ系のボード線図

位相差は

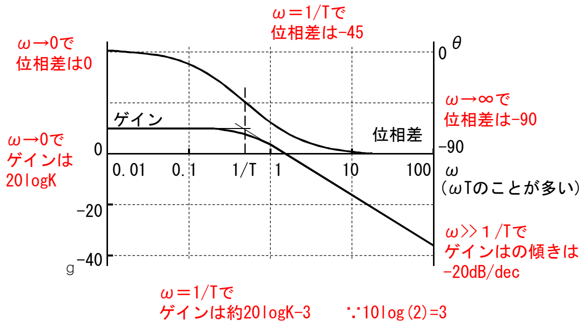
$$G(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega T}=\frac{K}{1+(\omega T)^2}(1-j\omega T)$$

$$\angle G(j\omega)=\tan^{-1}(-\omega T/1)\ =\tan^{-1}(-\omega T)$$

$\omega\to0$で$\theta\to0$、$\omega=1/T$で$\theta=-45$、$\omega\to\infty$で$\theta\to-90$
（位相差の単位は[deg]）

一次遅れ系のボード線図

一次遅れ系のボード線図は以下のようになる



一次遅れ系のボード線図

ボード線図から以下のことを知ることが出来る

$\omega\to\infty$で位相差が-90deg、 $\omega\to0$で位相差が0deg
及びω>>1/Tでゲインの傾きが-20dB/dec　となることから
　→　一次遅れ系と判断できる

位相差が-45deg となる角周波数ω 、
及びゲインが約20logK-3となる角周波数ωから、
　→　時定数 Tを求めることができる　　　　　$T=1/\omega$

$\omega\to0$でゲインは$g=20\log K$となることから、
　→ ゲイン定数 Kを求めることができる　　　　$K=10^{0.05g}$

⇩

システムの伝達関数を求めることが出来る

二次遅れ系のボード線図

二次遅れ系のボード線図を求める。ゲインは

$$G(s)\ =\frac{1}{as^2+bs+c}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

ただし、$\zeta=b/2\sqrt{ac}$ 、$\omega_n=\sqrt{c/a}$ 、$K=1/\sqrt{ac}$

$$G(j\omega)=\frac{K\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n j\omega+\omega_n^2}$$

$$=\frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2-\omega^2+j\,2\zeta\omega_n\omega}$$

$$=\frac{K\omega_n^2(\omega_n^2-\omega^2-j\,2\zeta\omega_n\omega)}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}$$

二次遅れ系のボード線図

$$|G(j\omega)|=\frac{K\omega_n^2\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}$$

$$=K\omega_n^2((\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2)^{-1/2}$$

よって、ゲインは

$$g(\omega)=20\log(G(j\omega))$$

$$=20\log K\omega_n^2-10\log((\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2)$$

二次遅れ系のボード線図

$\omega\to0$のとき

$$g(\omega)\fallingdotseq 20\log K\omega_n^2-10\log((\omega_n^2)^2)$$
$$g_0=20\log K+20\log\omega_n^2-20\log(\omega_n^2)$$
$$=20\log K$$

$\omega=\omega_n$のとき

$$g(\omega)\fallingdotseq 20\log K\omega_n^2-10\log((2\zeta\omega_n^2)^2)$$
$$g_n=20\log K+20\log\omega_n^2-20\log(2\zeta\omega_n^2)$$
$$=20\log K-20\log(2\zeta)$$
$$=20\log K+20\log(1/2\zeta)$$

ω>>ω_nのとき

$$g(\omega)\fallingdotseq 20\log K\omega_n^2-10\log((\omega^2)^2)$$
$$=20\log K+20\log\omega_n^2-20\log(\omega^2)$$
$$=20\log K+20\log\omega_n^2-40\log(\omega)$$

二次遅れ系のボード線図

位相差は

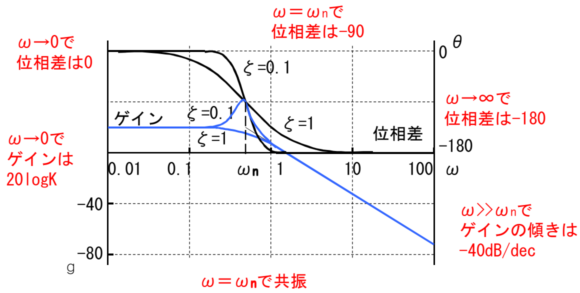
$$G(j\omega)=\frac{K(\omega_n{}^2-\omega^2-j2\zeta\omega_n\omega)}{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}$$

$$\angle G(j\omega)=\tan^{-1}(2\zeta\omega_n\omega/(\omega_n{}^2-\omega^2))$$

$\omega\to0$で$\theta\to0$、$\omega=\omega_n$で$\theta=-90$、$\omega\to\infty$で$\theta\to-180$
（位相差の単位は[deg]）

二次遅れ系のボード線図

二次遅れ系のボード線図は以下のようになる



二次遅れ系のボード線図

ボード線図から以下のことを知ることが出来る

$\omega\to\infty$で位相差が-180deg
及びω>>ω_nでゲインが-40dB/dec　となることから
→　二次遅れ系と判断できる

位相差が-90deg となる角周波数ωから
→固有角振動数ω_nを求めることが出来る。　$\omega_n=\omega$

$\omega\to0$でゲインg_0は$g_0=20\log K$　となることから
→ゲイン定数Kを求めることができる　$K=10^{0.05g_0}$

$\omega=\omega_n$でのゲインg_nの値から
→減衰比ζを求めることができる　$\zeta=\frac{1}{2}10^{0.05(g_0-g_n)}$

システムの伝達関数を求めることができる

実験的方法による制御システムの解析

① 入力信号の周波数ωを変化させながら、出力信号を測定する、

② それぞれの振幅 a,b からゲインを求める　$g=20\log(b/a)$

③ 入力信号と出力信号の位相差θを求める

④ 周波数に対するゲイン、位相差をプロットし、ボード線図を作成する

⑤ ボード線図から伝達関数を推測する