制御技術

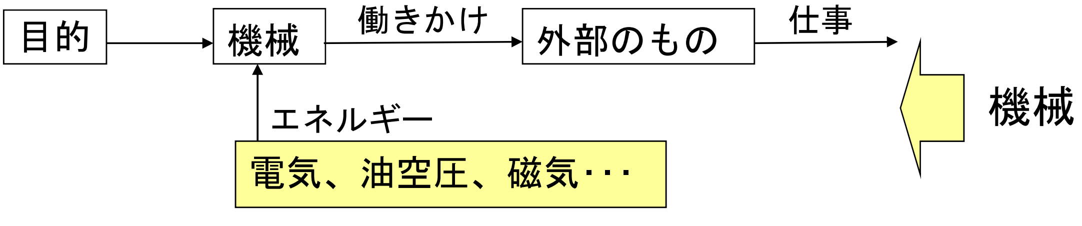
１．制御システム概要

（１）自動制御システムの構成とその働き

「機械」とは

全ての機械は、エネルギーを変換して外部に対して何らかの仕事をする。　（機械の定義の一つ）

目的（仕事）が与えられ、その目的が達せられるように機械は外部のものに対して働きかける



目的が達成・・・機械の任務は完了

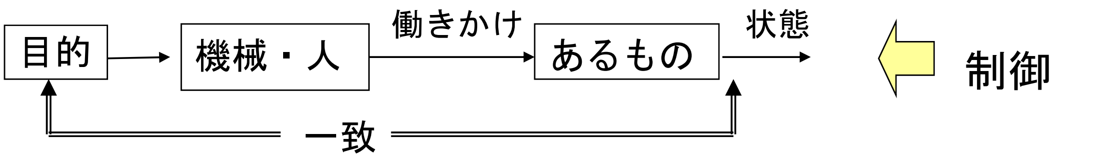
「制御」とは

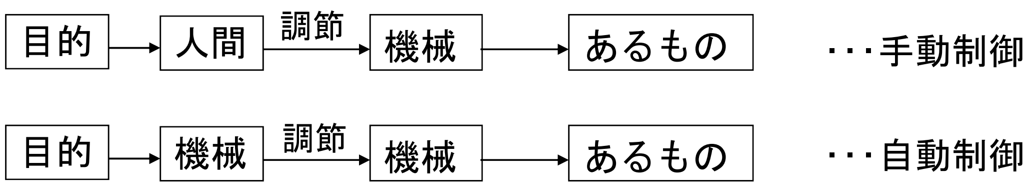
制御とは

「ある目的に適合するように、対象となっているものに所要の操作を加えること」　（JISの定義）

簡単に言い換えると

「あるものの状態が目的通りになるように働きかけること」



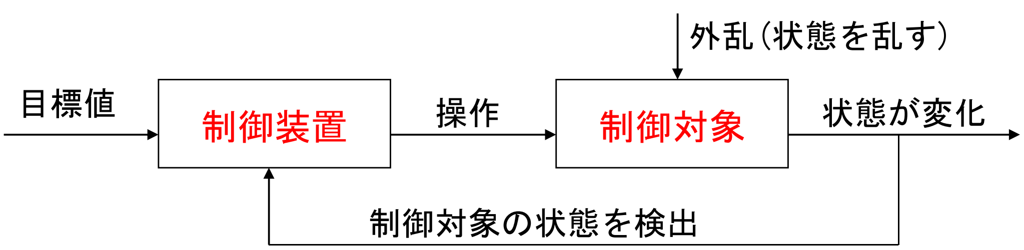


自動制御とは

自動制御とは

「ある目的に適合するように、人を介さずに、対象になっているものに所要の操作をすること」

自動制御システムには制御する制御装置と、制御される制御対象があり、制御装置は、制御対象の状態が目標値（目的）と一致するように、制御対象に働きかける（操作する）。



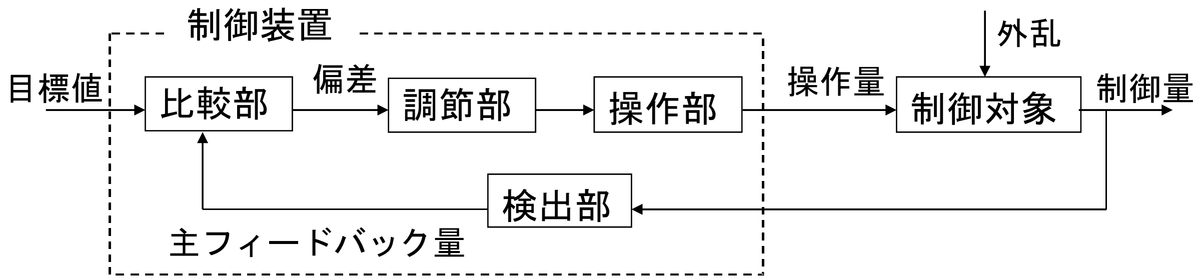
自動制御システム

制御装置の働き

制御装置の構成・・・検出部、調節部、操作部

その働きは、

検出部：制御対象の状態（制御量）を取り込む
調節部：目標値と制御量との差をなくすよう調節する
操作部：制御対象に働きかける（操作量）
比較部：目標値と制御量を比較する

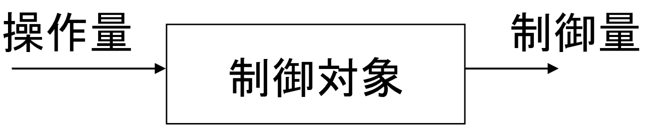


自動制御システムの構成を表した図　・・・ブロック線図

制御対象の動作

操作部からの操作量により、制御対象の制御量が変化する

操作量により、制御対象の制御量を制御する



操作部
　モータ、
　ヒーター、
　ソレノイド
　⋮

操作量 ⇨

制御対象・制御量
　テーブルの位置
　電車の速度
　レーダーの角度、
　半田ごての温度、
　油圧の圧力、
　酸素の流量
　⋮

自動制御の種類

自動制御の種類として**フィードバック制御**と**シーケンス制御**

フィードバック制御・・・

「制御量を検出し、目標値と比較しながら操作する制御」

クローズドループ制御ともいう

フィードバック制御を行う集まりをフィードバック制御システムという

自動制御の種類

自動制御の種類として**フィードバック制御**と**シーケンス制御**

シーケンス制御・・・

「あらかじめ定められた順序または手続きに従って制御の各段階を逐次進めていく制御」

簡単に言うと

「あらかじめ定められた順序で実行する制御、

もしくは

あらかじめ定められた条件で実行する制御」

動作内容が決まっていて、その動作を順番に実行する

全自動洗濯機

条件が満たされたら、その条件に応じた動作を実行する

自動販売機

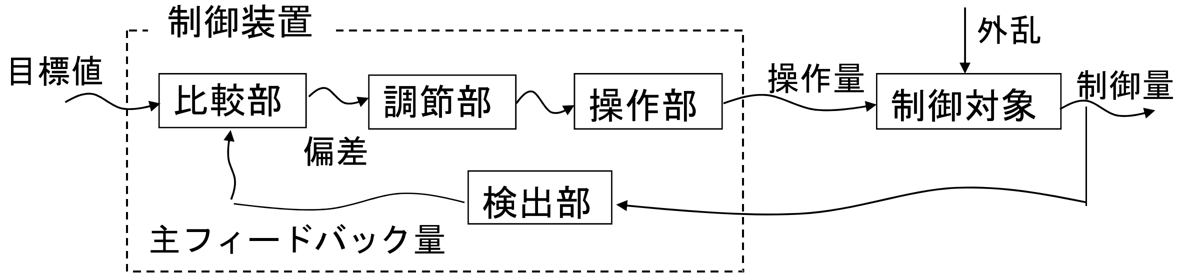
（２）フィードバック制御

フィードバック制御

フィードバック制御とは
制御量が目標値と一致するように調節する制御

目標値、制御量ともアナログ量（連続した量）を扱う

常に制御量を検出し、目標値と一致するように微妙な調節を行う理想的な制御

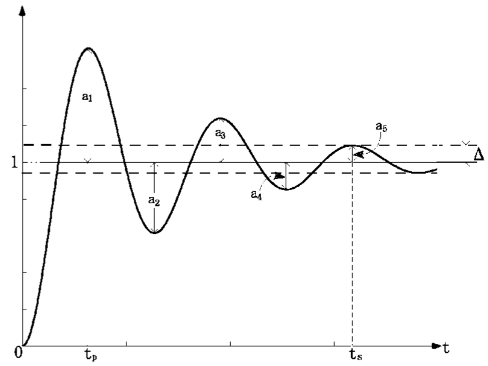


制御対象の動作

フィードバック制御システムでは、制御量が目標値に早く一致することが求められる。

しかしながら、システムの設計が適切でないと、制御量が不安定になったり、安定するまでの時間がかかったり、目標値と一致しなかったりなど、望ましくない動作をすることがある。

制御システムに求められるものは
　　安定性
　　即応性
　　定常特性
である。



制御対象の動作

「安定性」：制御量が振動し続けたり、発散しないこと
　システム設計が適切でないと、制御量が振動し続けたり、発散したりすることがある。

「過渡特性（即応性、減衰性）」：早く目標値に近づくこと
　システム設計が適切でないと、制御量が振動しながら目標値に近づいたり、振動はしないが目標値と一致するまでの時間がかかりすぎたりする。

「定常特性（定常偏差）」：目標値に一致させること
　システム設計が適切でないと、制御量が目標値と一致しないで動作が停止してしまうことがある。

フィードバック制御の種類

フィードバック制御の種類としてON/OFF制御と比例制御

ON/OFF制御・・・

「制御対象の制御量（状態）が目標値に達していなければ一定の操作量を制御対象に加え、目標値を超えれば操作量を加えるのを止める制御」

操作量をON/OFFすることにより、制御量を調節

簡単な制御ではあるが、制御特性（安定性、過渡特性、定常特性）が良くない。

フィードバック制御の種類

フィードバック制御の種類としてON/OFF制御と比例制御

比例制御・・・

「制御対象の制御量（状態）が目標値と一致するように偏差に比例した操作量を制御対象に加える制御」

操作量を連続的に変化させることにより制御量を調節

操作量をある範囲で連続的に変化させて制御対象に加える制御なので、細かな調節ができる。

困難な制御ではあるが、制御特性（安定性、過渡特性、定常特性）が優れている。

フィードバック制御の種類

比例制御として、以下のものがある（詳細は後ほど）

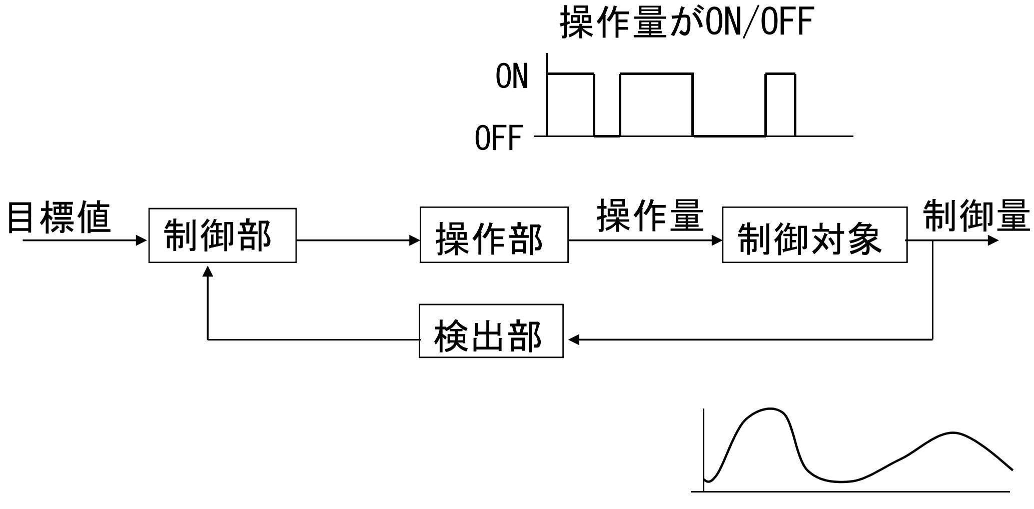
連続比例制御：
ある範囲で連続した操作量を加える制御。理想的であるが、アナログ信号を使った調節となり、技術的に困難（アナログ制御）で、かつエネルギー損失が大きい。

時間比例制御：
一定の操作量を高速でON/OFFし、ON時間とOFF時間の比率を連続的に変化させることによって調節する制御。デジタル制御でできるため技術的に容易で、かつエネルギー損失が少ない。

位置比例制御：
目標値の近傍のある範囲だけを比例制御し、それ以外はON/OFF制御を行う制御

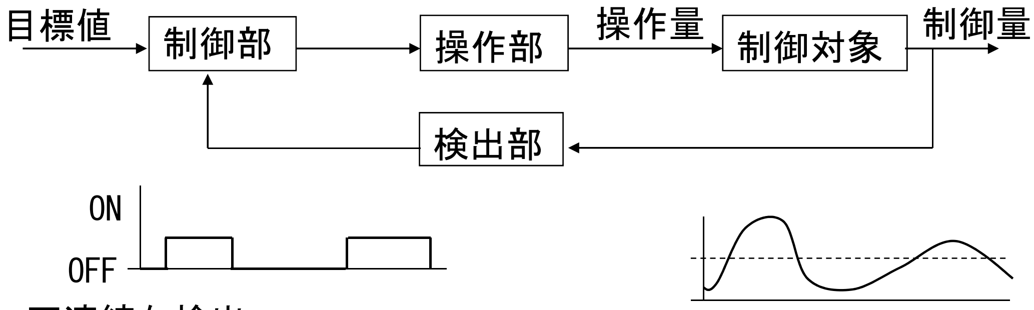
ON/OFF制御

操作量のON/OFFにより、制御量が変化する



ON/OFF制御

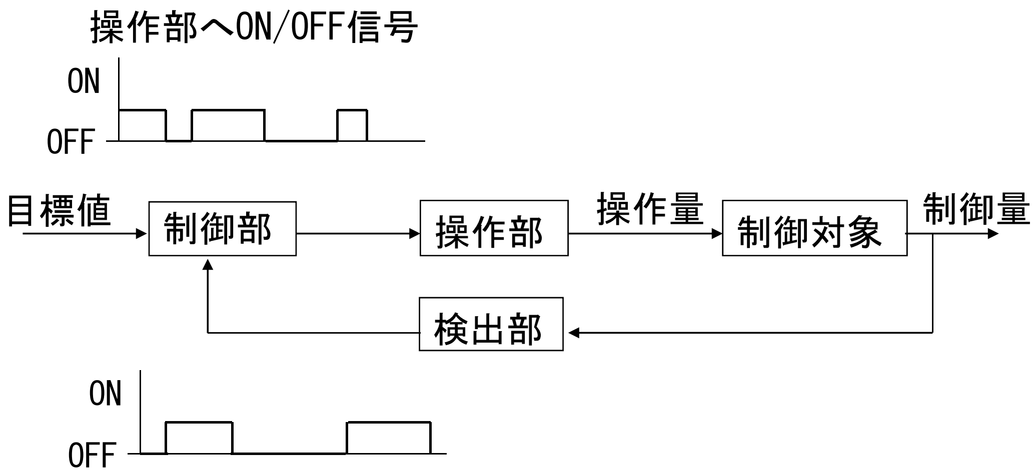
制御量が目標値を超えたかどうかを検出する



不連続な検出
（目標値を超えたか、超えないか）

ON/OFF制御

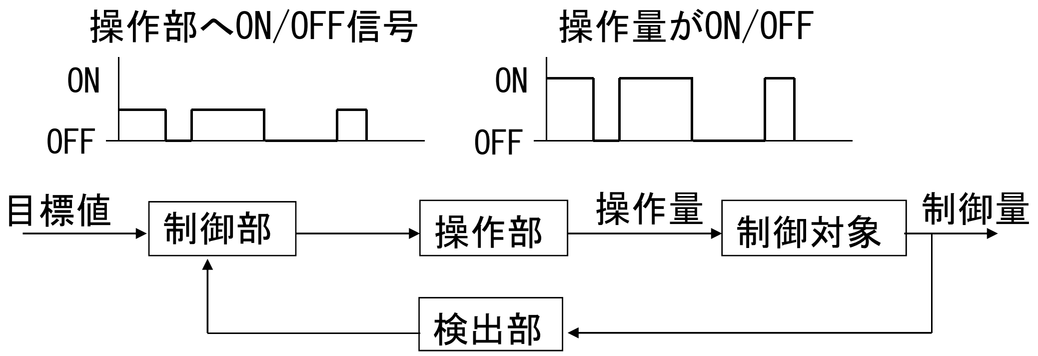
制御量が目標値を超えたとき、超えないときの動作を決める



不連続な検出
（目標値を超えたか、超えないか）

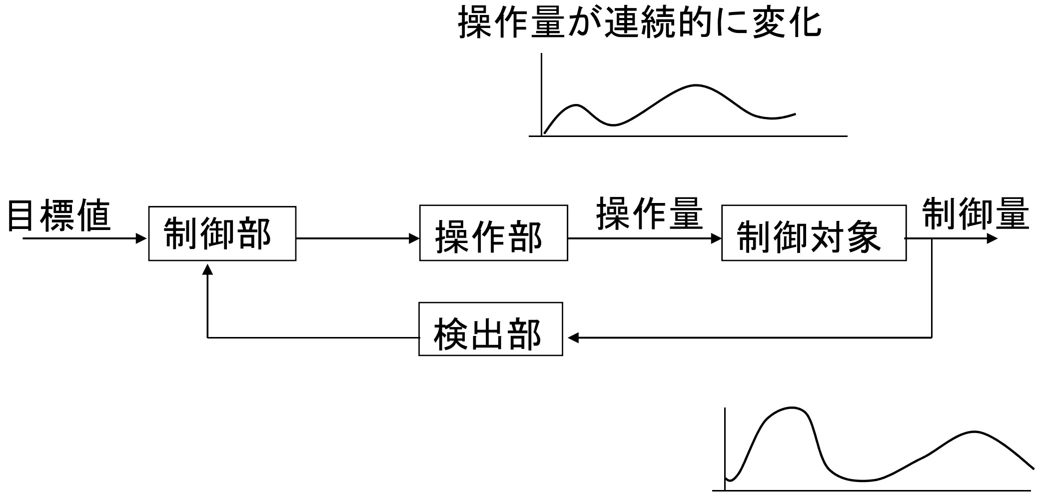
ON/OFF制御

制御部のON/OFFにより、操作部をON/OFFする



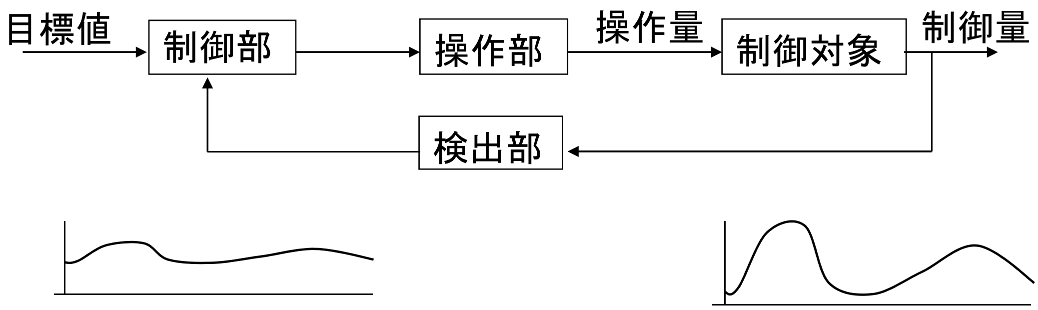
連続比例制御

操作量の大きさにより、制御量が変化する



連続比例制御

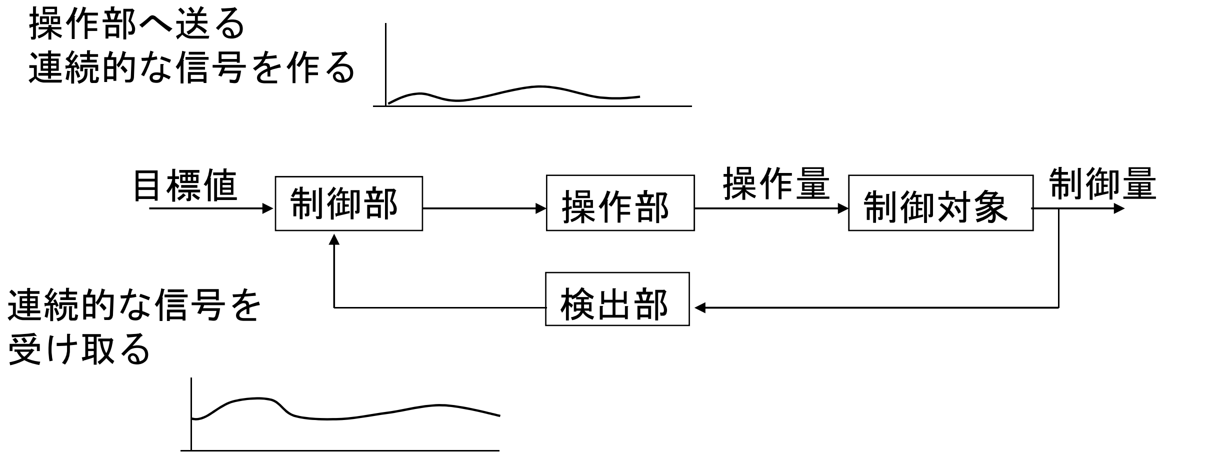
制御量の変化を検出部で検出する



制御量を連続的に検出（その時々の値を検出）

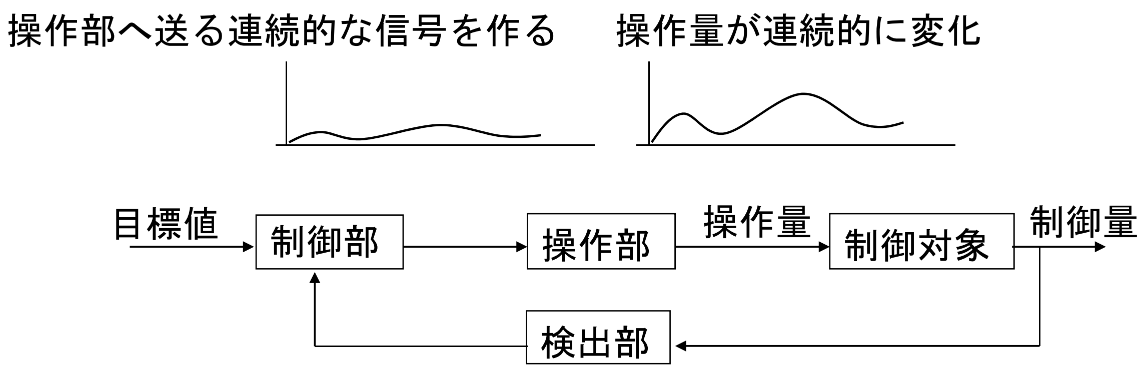
連続比例制御

検出部から信号を受け取り、制御対象の制御量が目標値と一致するように操作部に信号を送る



連続比例制御

検出部から信号を受け取り、制御対象の制御量が目標値と一致するように操作部に信号を送る



フィードバック制御

フィードバック制御の中でも、

目標値が一定で、制御量が目標値と等しくなるようにするもの

・・・定値制御

目標値があらかじめ決められたように変化し、制御量が目標値と等しくなるようにするもの

・・・プログラム制御

目標値が任意に変化し、制御量がその変化に追従するようにするもの

・・・追従制御

追従制御

追従制御の中でも、

位置、速度、角度などを制御するもの

・・・サーボ系（サーボシステム、サーボ機構）

フライス盤の自動テーブル送り

自動車のオートクルージング（一定速度走行）

電車の速度

ロケットの進行方向　　　など

圧力、温度、流量などを制御するもの

・・・プロセス制御

化学プラントでの原料（液体）の流量

溶鉱炉の炉の温度

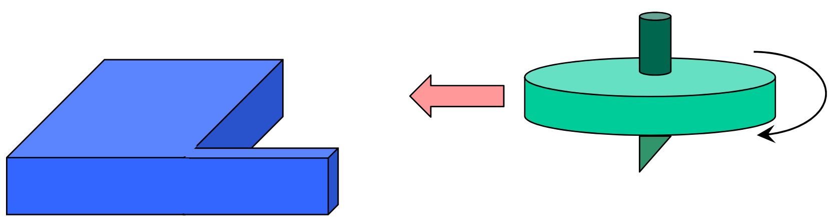
原発の原子炉内の圧力　　など

サーボ機構の例

フライス盤のX軸送りモータの場合・・・送り速度が一定

X軸の移動速度を速度センサで測定し、モータに流す電流（かける電圧）で移動速度を制御する

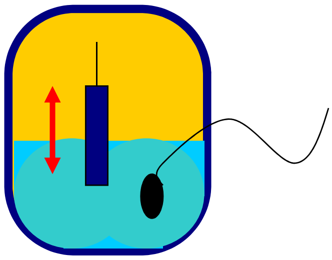
- 工作物の切削幅が狭い（切削抵抗が小さい）
  →送り速度が少し遅くなるので、
  電流を少し大きくして、元の速度で送る
- 工作物の切削幅が広い（切削抵抗が大きい）
  → 送り速度がかなり遅くなるので、
  電流をさらに大きくして、元の速度で送る



プロセス制御の例

原発の原子炉の場合
　温度センサで炉の冷却水の温度を測定し、制御棒（核分裂を抑制）で核分裂を制御する

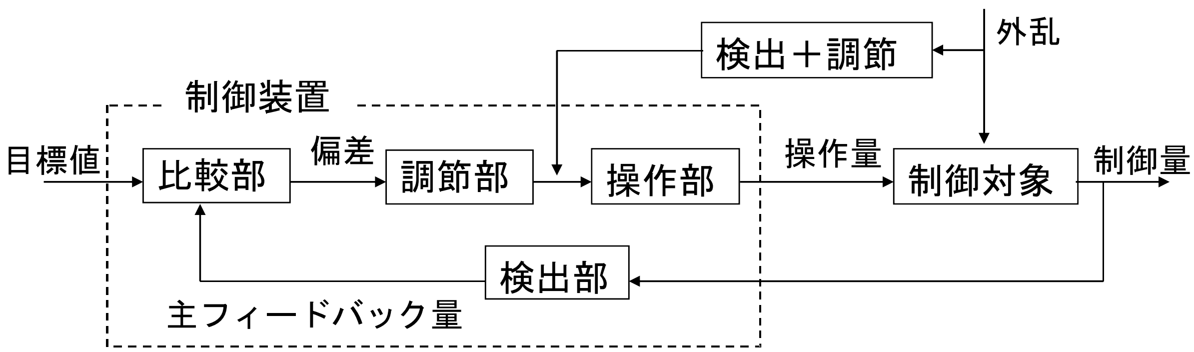
・冷却水の温度が下降
　　→ 制御棒を出し、核分裂を促進・・・水温上昇
・冷却水の温度が上昇
　　→ 制御棒を入れ、核分裂を抑制・・・水温低下



フィードフォワード制御

フィードバック制御では、外乱の影響を受けた場合、
制御量が変化し、その後から修正する。
　→　外乱の影響を100%受けてしまう

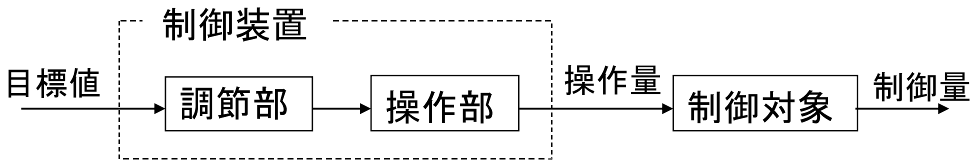
外乱を検出し、制御量の変化を少なくするために信号を調節し、操作部に信号を送る
　・・・　フィードフォワード制御



オープンループ制御

操作量と制御量の関係が明確になっていて、操作した結果（制御量）を想定しながら調節する制御

・・・制御量は目標値と一致しているはず
必ずしも目標値と一致いているとは限らない



例：ステッピングモータによる位置制御
外部からのパルス信号の数で回転する角度は決まるが、
過剰な力が働くと、その角度はずれる

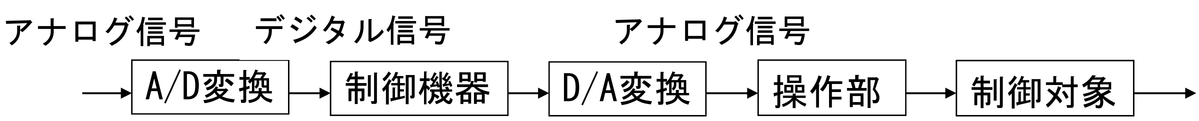
オープンループ制御は、制御は簡単だが
目標値と制御量が一致しないことがある

デジタル制御

連続したアナログ信号を使った制御は理想的な制御
だが、アナログ制御は高度な技術が要求され、実現が困難

アナログ信号をデジタル信号に変換し、デジタル信号でアナログ的な制御を行う・・・デジタル制御＝コンピュータ制御

1) アナログ信号をデジタル信号に変換する（A/D変換）、
2) デジタル信号をデジタル制御機器（コンピュータ等）を使って
別の信号を作り変える
3) 出力されたデジタル信号をアナログ信号に変換し（D/A変換）、
変換されたアナログ信号で制御対象に働きかける



実際の制御システムの構成

実際に使われる機器の名称で表すと

調節部、比較部　:　制御機器
（コントローラ、電子回路）

操作部　:　出力機器
（モータ、ヒーターなど）

検出部　:　入力機器
（センサ、スイッチ、計測器など）

（３）シーケンス制御

シーケンス制御

あらかじめ定められた順序または手続きに従って制御の各段階を逐次進めていく制御。
動作内容が決まっていて、それらを順番に実行する
例：生産ラインの自動製造装置、自動販売機、
家電製品（全自動洗濯機、炊飯器・・・）

例えば、全自動洗濯機の場合
1)水をためる → 2)モータを回す（洗濯） → 3)排水 →
4)脱水 → 5)水をためる → 6)モータを回す（すすぎ）
→・・・・

必ずこの順番で動作する
衣類の汚れが落ちたかどうかはチェックしていない

シーケンス制御の例

全自動洗濯機の場合
1)運転ボタンが押されたら水をためる
給水バルブをONにする → 水位が上昇
水位センサがONになったら給水バルブをOFFにする

2)水位センサがONになったら洗濯
モータをONにする → モータ回転
設定時間経過したらモータをOFFにする

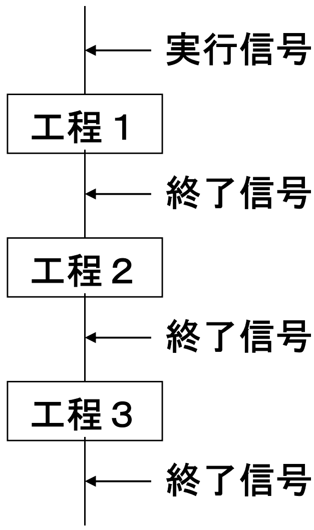
3)設定時間経過したら排水
排水バルブをONにする → 水位が下降
排水センサがONになったら排水バルブをOFFにする
・
・
・
・

シーケンス制御の特徴

あらかじめ決められた工程を順番に実行していく制御。自動化装置などはほとんどがシーケンス制御

各工程は工程終了のON/OFFを常に検出し、終了信号を検出したら次の動作を実行。
（ある意味ON/OFFのフィードバック制御）

ある条件が満たされたときに制御対象をONにする制御もシーケンス制御という。



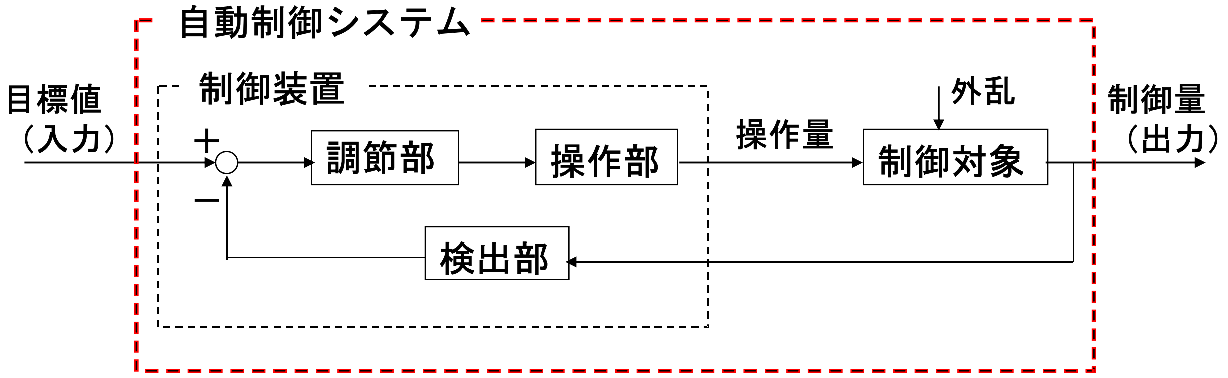
ここから先は定量制御の中の
フィードバック制御について
深く説明する

２．制御要素

（１）応答

制御系の信号変化

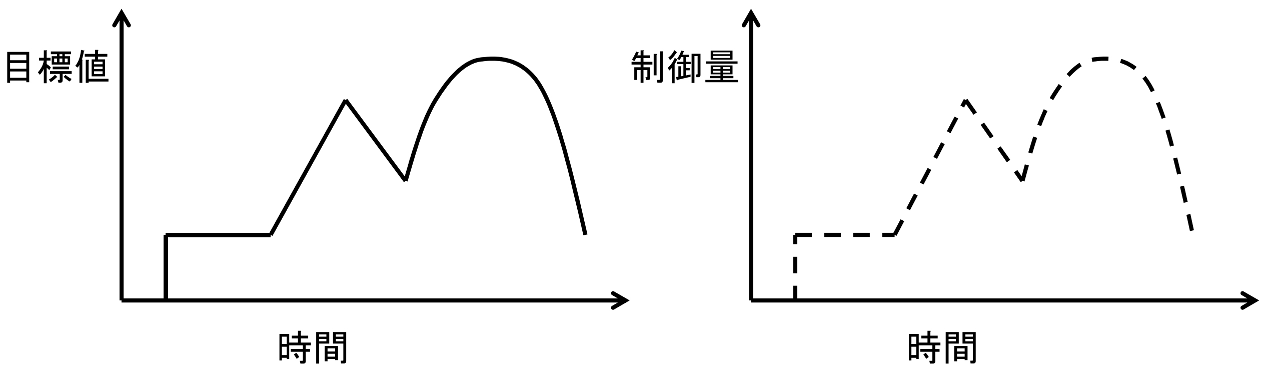
自動制御システム（定量制御）では
目標値が入力されると、制御量が出力される・・・応答



この入力信号と出力信号の関係を調べてみる

理想的な応答

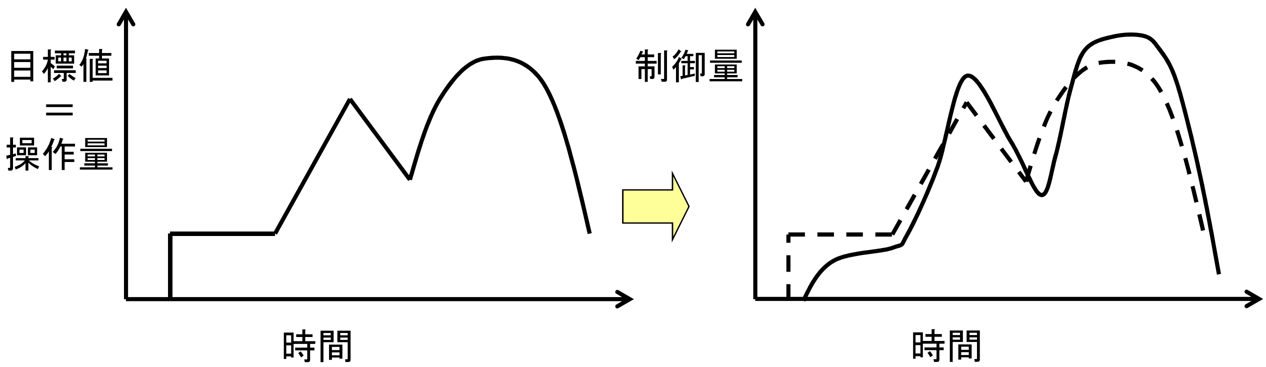
理想的な自動制御システムは
　　目標値が入力されると、直ちに制御量が目標値と一致



実際の応答

理想的な自動制御システムは
　目標値が入力されると、直ちに制御量が目標値と一致

目標値＝操作量だと
　目標値と制御量の間でずれが生じる

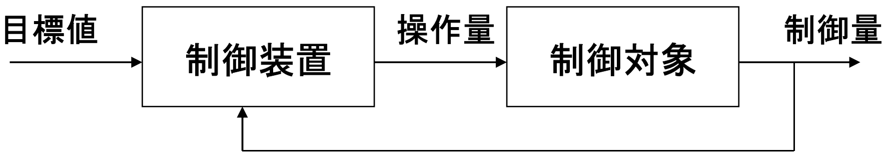


信号変化のずれの原因

目標値と制御量のずれの原因

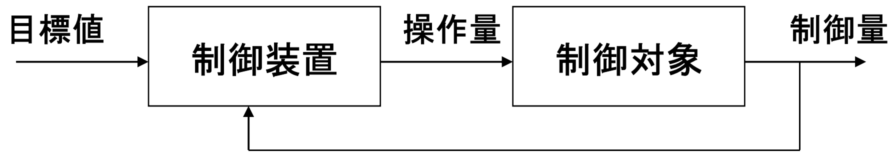
制御対象の特性（慣性、即応性など）により、
目標値＝操作量に対し、制御量（出力）が直ちに追従ない

制御装置が、制御量のずれを補正するように
操作量を調整する

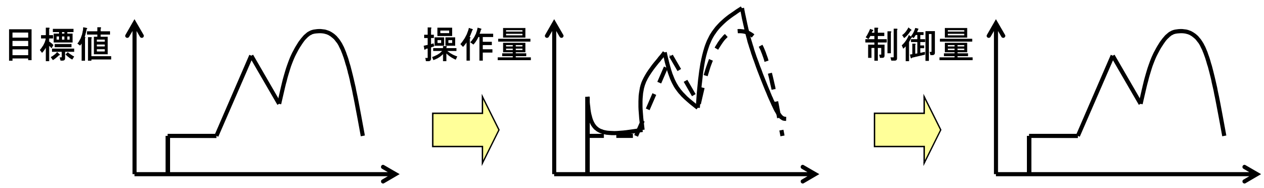


信号変化のずれの補正

目標値と制御量のずれの補正



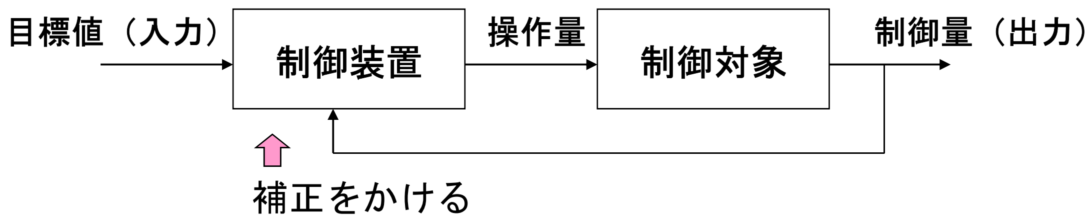
対策
①操作量と制御量の関係を見つけ出し、誤差（ずれ）を検討
②制御量が目標値と一致するように、制御装置で操作量を補正



入力信号と応答

あらかじめ制御対象の応答を調べ、制御対象のずれ（誤差）を補正するような操作量を送る制御装置にすればよい

自動制御システムの応答の改善

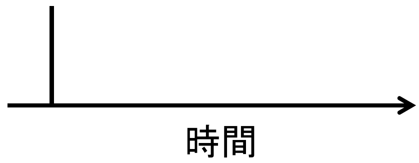


自動制御システムに既知の信号を入力し、出力信号を計測することにより、制御システムの特性を調べる

入力信号

応答を調べる際の代表的な入力信号

1) インパルス入力
　一瞬だけ信号が入力する
　インパルス入力→インパルス応答



$x(t) = \delta(t)$　デルタ関数

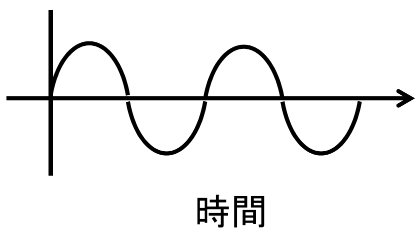
2) ステップ入力
　あるときから同じ信号が入力し続ける
　ステップ入力→ステップ応答
　大きさ１のステップ入力
　　→インディシャル応答

$x(t) = u(t)$　ステップ関数

入力信号

3) 正弦波入力
　周期的に信号が繰り返す
　正弦波入力（sin曲線）→周波数応答

$x(t) = A \cdot sin(\omega t)$　正弦関数



ω：角速度　$\omega = 2\pi f$
f：周波数
A：振幅

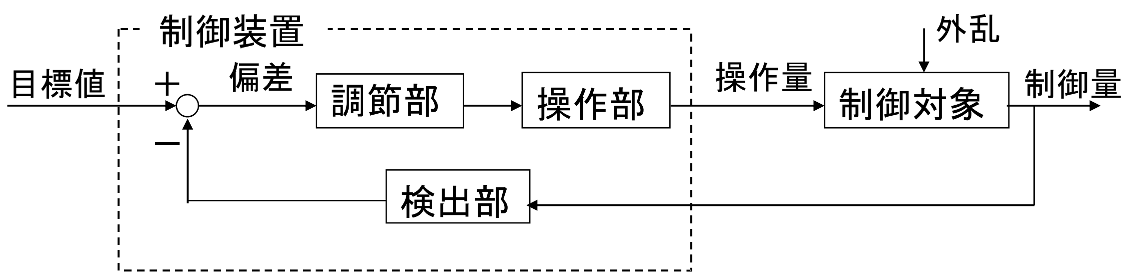
以下、理解しやすいように、単位ステップ入力の応答について調べる。・・・インディシャル応答

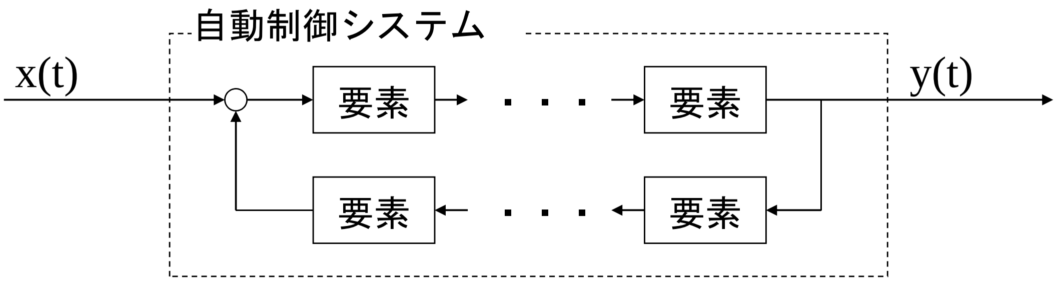
$x(t) = u(t)$

（２）制御要素

自動制御システムの構成

自動制御システムは、基本となるいくつかの要素を組み合わせたものとして考えることができる。

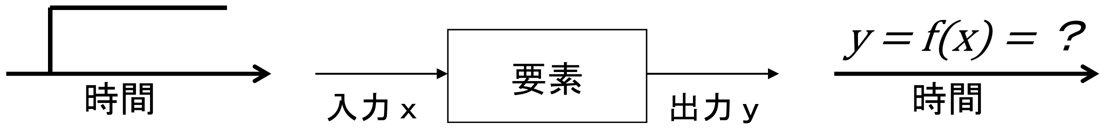




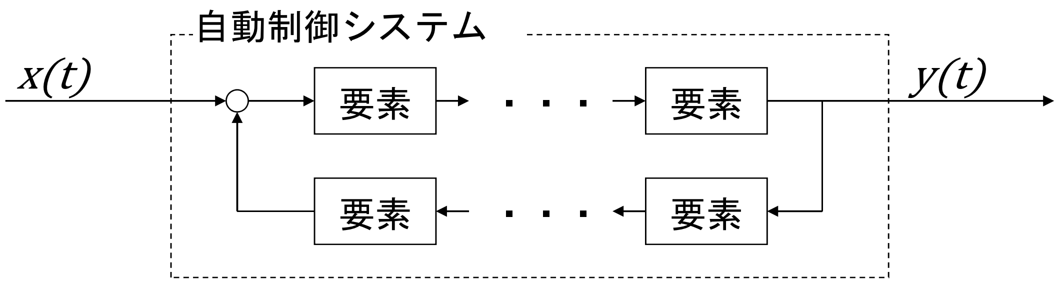
自動制御システムの構成

それぞれの要素に信号を入力したときの応答を調べる。

基本となる要素に信号を入力したときの応答を数式で求め、



その要素を組み合わせたシステムの応答を数式で導き出す。



$$y(t) = G(x(t))$$

a) 比例要素

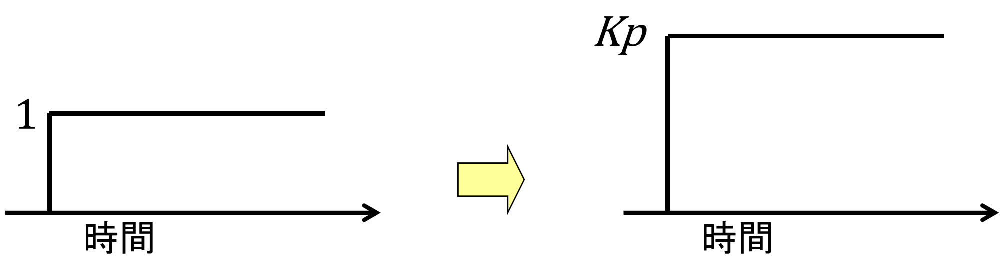
入力の定数倍を出力する要素　・・・比例要素

入力を $x(t)$、出力を $y(t)$ とすると

$$y(t) = Kp \cdot x(t)$$

Kp ：比例ゲイン

インディシャル応答は



b）積分要素

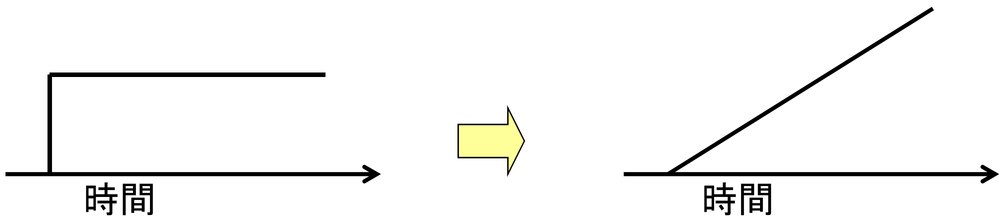
入力の積分を出力する要素　・・・積分要素

入力を $x(t)$、出力を $y(t)$ とすると

$$y(t) = Ki\int x(t)dt$$

Ki：積分ゲイン

インディシャル応答は



c）微分要素

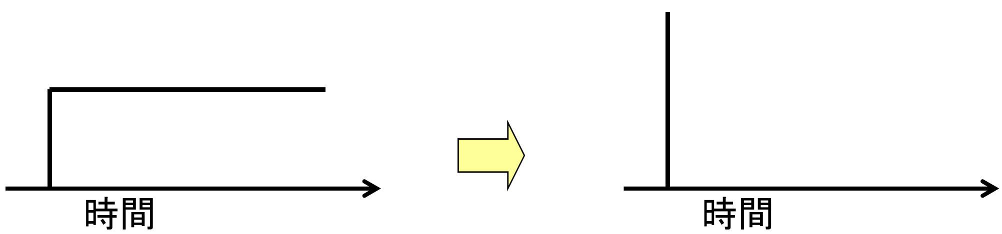
入力の微分を出力する要素　・・・微分要素

入力を $x(t)$、出力を $y(t)$ とすると

$$y(t) = Kd\frac{dx(t)}{dt}$$

Kd：微分ゲイン

インディシャル応答は



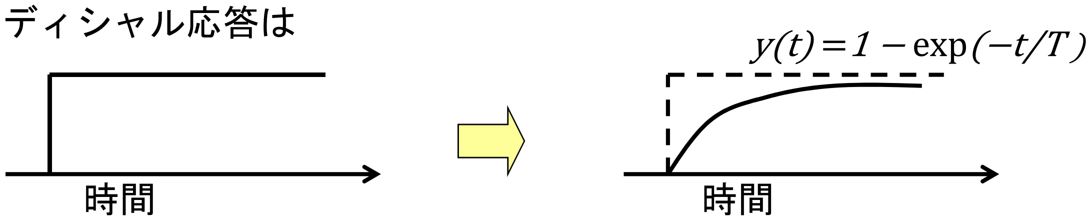
d) 一次遅れ要素

出力の定数倍と出力の微分の和を入力とする要素
・・・一次遅れ要素

入力を $x(t)$、出力を $y(t)$ とすると

$$x(t) = a\frac{dy(t)}{dt} + by(t)$$

インディシャル応答は



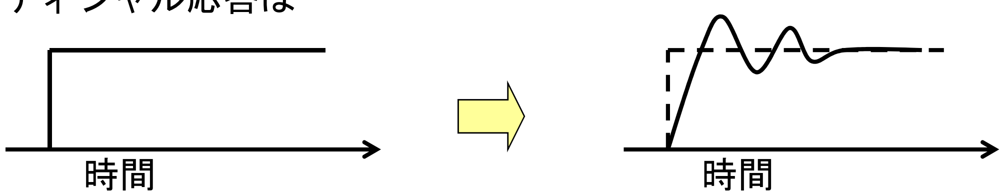
e) 二次遅れ要素

出力の定数倍と出力の微分と出力の２階微分の和を
入力とする要素　　　　　　　　　　・・・二次遅れ要素

入力を $x(t)$、出力を $y(t)$ とすると

$$x(t) = a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + cy(t)$$

インディシャル応答は



f)むだ時間要素

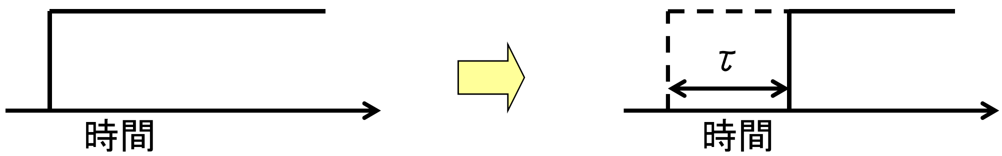
入力後、一定時間経過して出力する要素

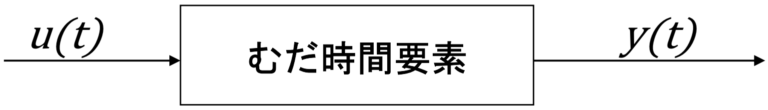
・・・むだ時間要素

入力を $x(t)$、出力を $y(t)$ とすると

$$y(t) = x(t-\tau)$$

インディシャル応答は

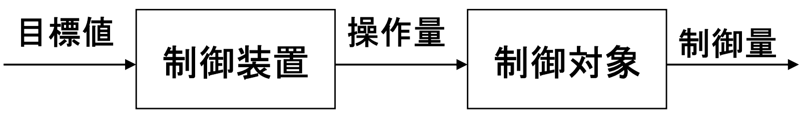




自動制御システムの特性

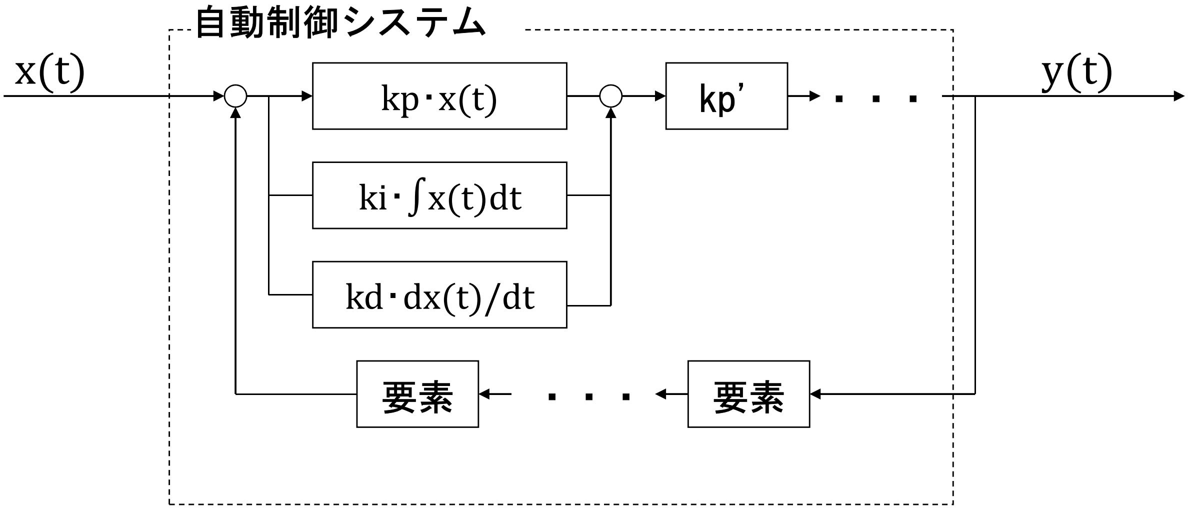
実際の自動制御システムは、これらの要素を組み合わせて近似することができる

1) 比例要素
2) 積分要素
3) 微分要素
4) 一次遅れ要素
5) 二次遅れ要素
6) むだ時間要素



自動制御システムを、制御対象と制御装置の組合せと考え、あらかじめ、制御システムの入力（目標値）と出力（制御量）の関係を調べておけば、制御装置をどのようにすると最適な制御が可能となるかを知ることができる。

自動制御システムの特性



各要素の式をまとめた物をシステム全体の関係式とし、その式を解くことにより、入力（目標値）と出力（制御量）の関係を調べることができる。

３．制御モデル

（１）ラプラス変換

自動制御システムの解析

自動制御システムは、制御要素を組み合わせたもので近似できる。

制御要素の入力と出力の関係が数学的に求められているので、システム全体の入出力の関係を求めれば、最適な制御システムにすることができる。

入力をx、出力をyとすると、システムの入出力の関係は例えば

$$y = \frac{(mx'+dx+k\int xdt)\cdot(s+rx')}{1+(ay''+by'+cy)\cdot(mx'+dx+K\int xdt)}$$

この微分方程式を解けばよい。

⇒ このままで解を求めるのは非常に困難（不可能）

ラプラス変換法

複雑な微分方程式を解く解法の一つとして
・・・ラプラス変換法

元の微分方程式をラプラス変換し、代数的に解き、
その結果を逆ラプラス変換して微分方程式を解く

ラプラス変換の定義

$$F(s) = \mathcal{L}\,[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

sは複素数

実際は、元の微分方程式を式変形し、ラプラス変換表を
使ってラプラス変換する

ラプラス変換による微分方程式の解法

ラプラス変換を使って微分方程式を解く

$$x(t) = a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + cy(t)$$

①与えられた微分方程式をラプラス変換する

$$X(s) = as^2Y(s) + bsY(s) + cY(s)$$
$$= (as^2 + bs + c)\,Y(s)$$

②代数的に計算する

入力 $x(t)$ が単位ステップ入力（＝１）のとき
$X(s)=1/s$　　ラプラス変換表より

$$Y(s) = \frac{1}{(ms^2+cs+k)s} = \frac{n1}{s-m1} + \frac{n2}{s-m2} + \frac{n3}{s}$$

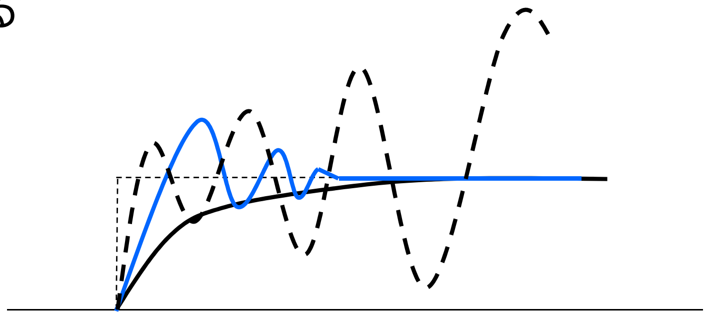
ラプラス変換による微分方程式の解法（続き）

ただし、$m1$、$m2$は　as^2+bs+c　の解
$n1+n2+n3=0$、$-b1a2-b2a1-b3(a1+a2)=0$、
$a1a2b3=1$

③逆ラプラス変換する

$y(t)=b1e^{-a1t}+b2e^{-a2t}+b3$

a1、a2、b1、b2、b3の値によりｙ(t)は以下の３パターンのように変化する



（２）伝達関数

関数論の基礎

２次方程式の解の公式

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

判別式	$D>0$	二つの異なる実数解
	$D=0$	重解
	$D<0$	二つの異なる虚数解

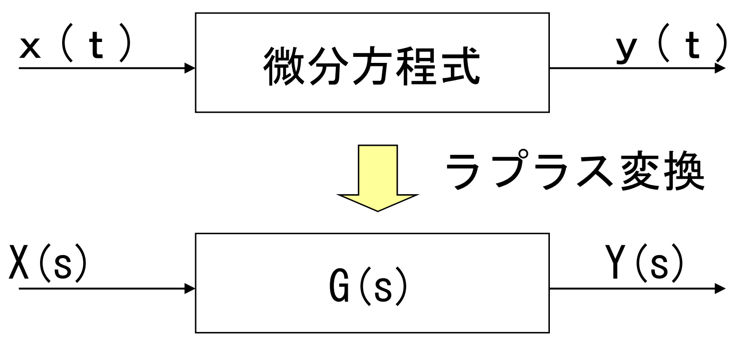
オイラーの公式

$$y=e^{i\theta}=\cos\theta+i\cdot\sin\theta$$

伝達関数

自動制御システムにおいて、入力と出力の関係を数式（微分方程式）で求めることが出来た。
その微分方程式をラプラス変換により解き、システムの特性を求める。

ラプラス変換した入力と出力の割合を**伝達関数**



$$\frac{Y(s)}{X(s)}=G(s)$$ ・・・伝達関数

各制御要素の伝達関数

自動制御システムは、これらの要素を組み合わせて
近似することができた

1) 比例要素
2) 積分要素
3) 微分要素
4) 一次遅れ要素
5) 二次遅れ要素
6) むだ時間要素

それぞれの要素をラプラス変換して、伝達関数を調べる

比例要素の伝達関数

比例要素は以下の式で表すことができた

$$y(t) = Kp \cdot x(t)$$

Kp ：比例ゲイン

これをラプラス変換して伝達関数を求めると

$$Y(s) = Kp \cdot X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = Kp$$

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\;Kp\;} \longrightarrow Y(s)$$

積分要素の伝達関数

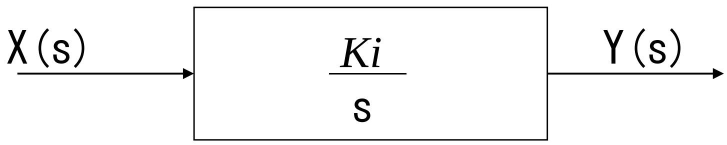
比例要素は以下の式で表すことができた

$$y(t) = K_i \int x(t)\,dt \qquad K_i：積分ゲイン$$

これをラプラス変換して伝達関数を求めると

$$Y(s) = K_i \cdot \frac{1}{s} X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_i}{s}$$



微分要素の伝達関数

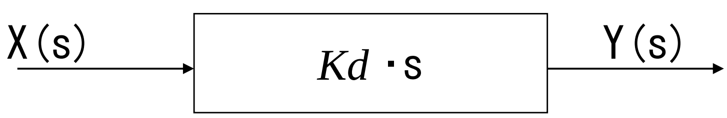
微分要素は以下の式で表すことができた

$$y(t) = K_d \frac{dx(t)}{dt} \qquad K_d：微分ゲイン$$

これをラプラス変換して伝達関数を求めると

$$Y(s) = K_d \cdot sX(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K_d \cdot s$$



一次遅れ要素の伝達関数

一次遅れ要素は以下の式で表すことができた

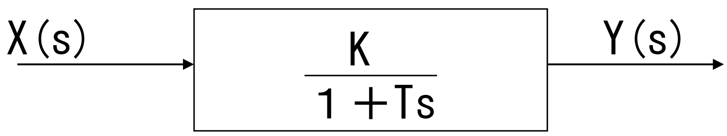
$$x(t) = a\frac{dy(t)}{dt} + by(t)$$

これをラプラス変換して伝達関数を求めると

$$X(s) = aY(s)\cdot s + bY(s) = (as+b)\,Y(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{b+as} = \frac{K}{1+Ts}$$

$K=1/b$　ゲイン定数
$T=a/b$　時定数



二次遅れ要素の伝達関数

二次遅れ要素は以下の式で表すことができた

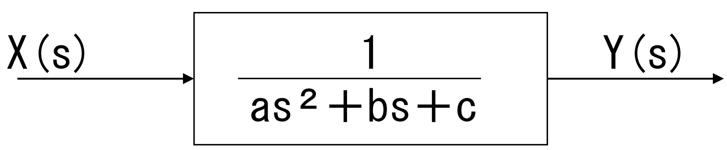
$$x(t) = a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + cy(t)$$

これをラプラス変換して伝達関数を求めると

$$X(s) = a\cdot s^2Y(s) + b\cdot sY(s) + cY(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{as^2+bs+c} = K\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$\omega_n = \sqrt{c/a}$ ：固有角振動数　　$\zeta = b/2\sqrt{ac}$ ：減衰比
$K=1/C$：ゲイン定数



むだ時間要素の伝達関数

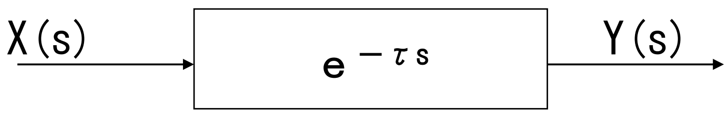
むだ時間要素は以下の式で表すことができた

$$y(t) = x(t - \tau)$$

これをラプラス変換して伝達関数を求めると

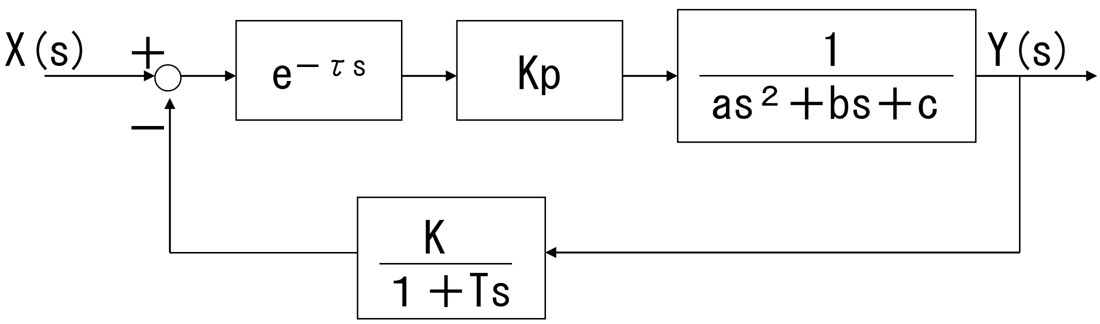
$$Y(s) = e^{-\tau s} X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-\tau s}$$



自動制御システムの伝達関数

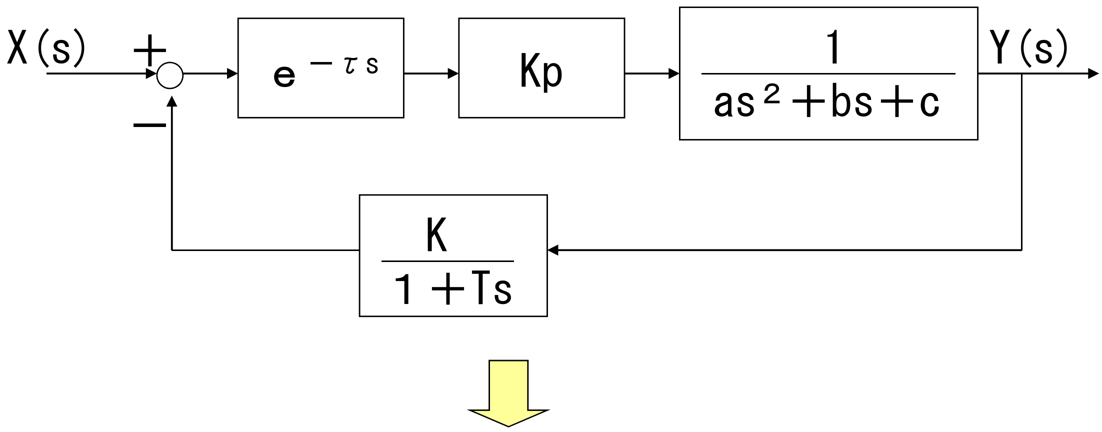
自動制御システムの伝達関数は、システムを構成する個々の伝達関数を求め、それらを組合わせて求めることができる。

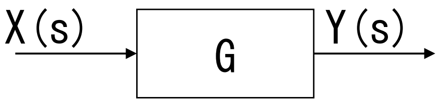


このような伝達関数を組合わせた図　・・・ブロック線図

ブロック線図の簡略化

複雑な構成の自動制御システムでも、そのブロック線図を簡単にすることができる。ブロック線図を簡単にしてからラプラス変換法により、特性を容易に求めることができる。

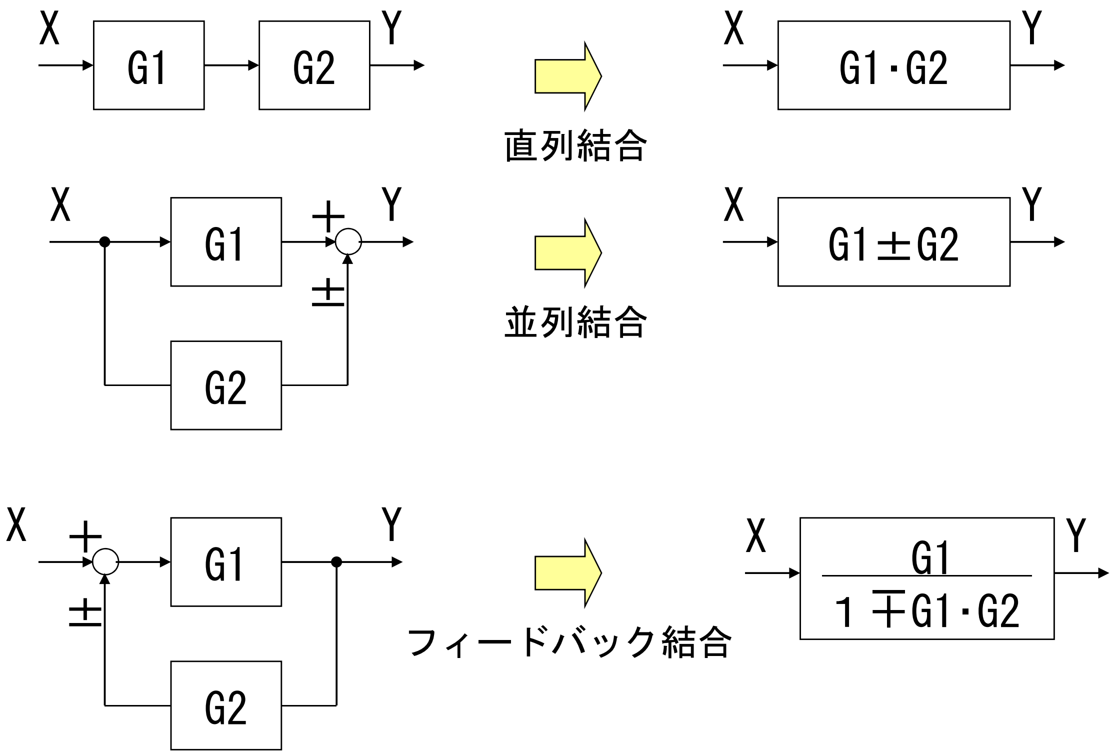




$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = ???$$

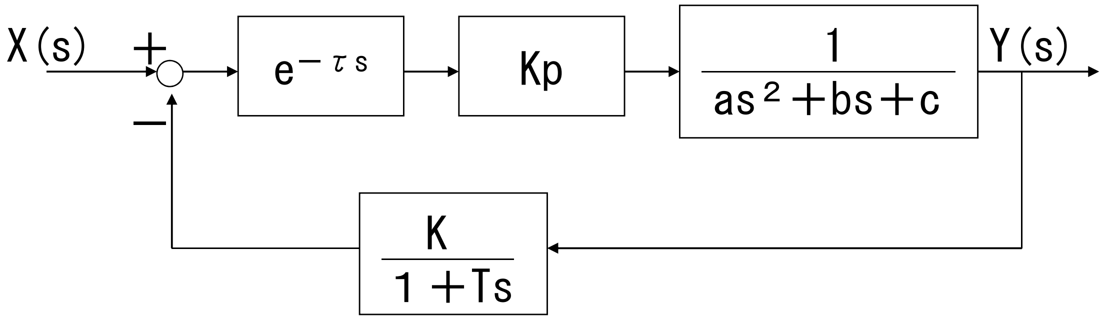
これを求める

伝達関数の結合



自動制御システムの伝達関数

自動制御システムの構成要素を求め、それらをラプラス変換し、伝達関数の結合を使って簡略化することにより、システム全体の伝達関数を求めることができる。



簡略化

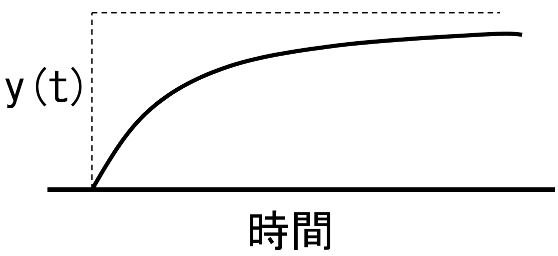
G(s)＝・・・・・・・

（３）一次遅れ系、二次遅れ系

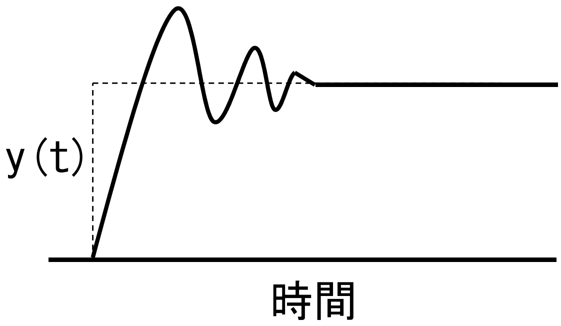
制御対象の伝達関数

最適な自動制御システムを作るために、まず制御対象の応答を知る必要がある。

多くの制御対象の伝達関数は、一次遅れ系、二次遅れ系で近似することができる。



一次遅れ系



二次遅れ系

このニつの要素の特徴について詳しく調べる

一次遅れ系のステップ応答

一次遅れ系のステップ応答を調べる

$$x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)$$

ラプラス変換して

$$G(s)=\frac{K}{1+Ts}$$

$K=1/b$　ゲイン定数
$T=a/b$　時定数

$G(s)=Y(s)/X(s)$、　$X(s)=1/s$　より

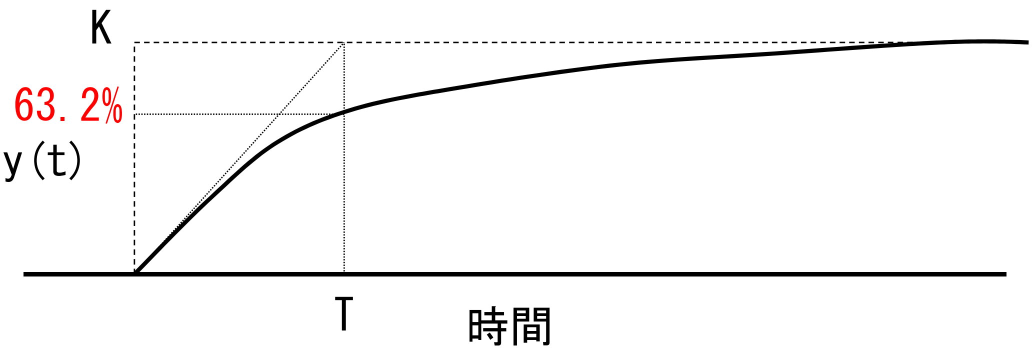
$$Y(s)=\frac{K}{1+Ts}\,\frac{1}{s}=\frac{-KT}{1+Ts}+\frac{K}{s}=\frac{-K}{1/T+s}+\frac{K}{s}$$

一次遅れ系のステップ応答

逆ラプラス変換して

$$y(t) = -K \cdot e^{-1/T \cdot t} + K = K(1 - e^{-t/T})$$

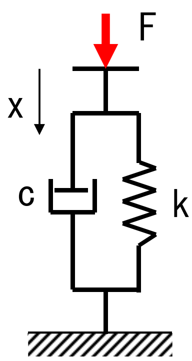
t＝0での接線の傾きはK/T
t＝Tでのｙは 0.632K
t→∞でKに収束

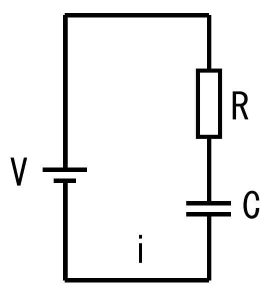


一次遅れ系の例

一次遅れ系の例

$$x(t) = a\frac{dy(t)}{dt} + by(t)$$





F：力（入力）
x：変位（出力）

$c \cdot dx/dt + kx = F$

変位と力

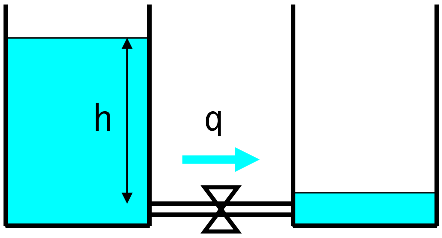
V：電圧（入力）
i：電流（出力）

$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = V$

流れる電流と電圧

一次遅れ系の例

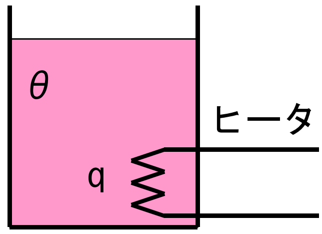
一次遅れ系の例　$x(t) = a\dfrac{dy(t)}{dt} + by(t)$



q：流量（入力）
h：水位（出力）

$C \cdot dh/dt + kh = q$

タンクの流量と水位



q　：熱（入力）
θ　：温度（出力）

$C \cdot d\theta/dt + k\theta = q$

熱とタンク流体の温度

二次遅れ系のステップ応答

二次遅れ系のステップ応答を調べる

$$x(t) = a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + cy(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

$G(s) = Y(s)/X(s)$、　$X(s) = 1/s$　より

$$Y(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}\frac{1}{s} = \frac{k_1}{s-\alpha} + \frac{k_2}{s-\beta} + \frac{k_3}{s}$$

α、β は　$as^2 + bs + c = 0$　の解

$k_1 = \beta/(\alpha-\beta)$、　$k_2 = -\alpha/(\alpha-\beta)$、$k_3 = 1/\alpha\beta$

これを解いて $y(t)$ を求める

二次遅れ系のステップ応答

逆ラプラス変換して

$$y(t) = k_1 e^{\alpha t} + k_2 e^{\beta t} + k_3$$

$$\alpha、\beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)}$$

ここで、$b/2\sqrt{ac} = \zeta$ 減衰比 （ $2\sqrt{ac} = c_c$ 臨界減衰係数）

$\sqrt{c/a} = \omega_n$ 固有角振動数

とおくと

$$\alpha、\beta = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

二次遅れ系のステップ応答

α、βを $y(t) = k_1 e^{\alpha t} + k_2 e^{\beta t} + k_3$ に代入すると

$$y(t) = k_1 e^{(-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{(\zeta^2-1)})t} + k_2 e^{(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{(\zeta^2-1)})t} + k_3$$

ここで、

1）$\zeta > 1$のとき

$$-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) < 0$$

$$-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) < 0$$

より

$$y(t) = k_1 e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + k_2 e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + k_3$$

よって、出力は振動せずにk_3に収束する（過減衰）。

二次遅れ系のステップ応答

２）$\zeta=1$のとき

$$-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n$$

$$-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n$$

重解の場合、$k_1 e^{(-\zeta\omega_n t)}$の他に$k_2 t e^{(-\zeta\omega_n t)}$も解の一つになることから

$$y(t)=k_1 e^{(-\zeta\omega_n t)}+k_2 t e^{(-\zeta\omega_n t)}+k_3$$
$$=(k_1+tk_2)e^{-\zeta\omega_n t}+k_3$$

よって、出力は振動せずにk_3に収束する（臨界減衰）

二次遅れ系のステップ応答

３）$0<\zeta<1$のとき

$$-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

ここで、$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ とおくと　（減衰固有角振動数）

$$y(t)=k_1 e^{(-\zeta\omega_n+j\omega_d)t}+k_2 e^{(-\zeta\omega_n-j\omega_d)t}+k_3$$

$$=k_1 e^{-\zeta\omega_n t}(\cos(\omega_d t)+j\sin(\omega_d t))$$
$$+k_2 e^{-\zeta\omega_n t}(\cos(\omega_d t)-j\sin(\omega_d t))+k_3$$

＝［省略］

$$=k e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta)+k_3$$

よって、出力は周波数 $\omega_d/2\pi$ で振動しながらk_3に収束する

（減衰振動）

二次遅れ系のステップ応答

４）$\zeta=0$のとき

$$-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=\ j\omega_n$$

$$-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-j\omega_n$$

より

$$y(t)=k_1 e^{j\omega_n t}+k_2 e^{-j\omega_n t}+k_3$$

$$=k_1(\cos(\omega_n t)+j\sin(\omega_n t))$$
$$+k_2(\cos(\omega_n t)-j\sin(\omega_n t))+k_3$$

$$=(k_1+k_2)\cos(\omega_n t+\theta)+k_3$$

よって、出力は周波数 $\omega_n/2\pi$ で振動し続ける

（不減衰振動）。

二次遅れ系のステップ応答

５）$-1<\zeta<0$のとき

$$-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

より

$$y(t)=k_1 e^{(-\zeta\omega_n+j\omega_d)t}+k_2 e^{(-\zeta\omega_n-j\omega_d)t}+k_3$$

$$=k_1 e^{-\zeta\omega_n t}(\cos(\omega_d t)+j\sin(\omega_d t))$$
$$+k_2 e^{-\zeta\omega_n t}(\cos(\omega_d t)-j\sin(\omega_d t))+k_3$$

＝［省略］

$$=k e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta)+k_3$$

$\zeta<0$より、出力は周波数$\omega_d/2\pi$で振動しながら発散する。

二次遅れ系のステップ応答

6）ζ＝-1のとき

$$-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n$$

$$-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n$$

より

$$y(t)=k_1 e^{(-\zeta\omega_n t)}+k_2 e^{(-\zeta\omega_n t)}+k_3$$

$$=(k_1+k_2)e^{-\zeta\omega_n t}+k_3$$

ここで$\zeta<0$ より出力は振動しないで発散する。
（振動しない限界点）

二次遅れ系のステップ応答

7）$\zeta<-1$のとき

$$-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=\omega_n\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)>0$$

$$-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=\omega_n\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)>0$$

より

$$y(t)=k_1 e^{\omega_n\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}$$

$$+k_2 e^{\omega_n\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}+k_3$$

よって、出力は振動しないで発散する。

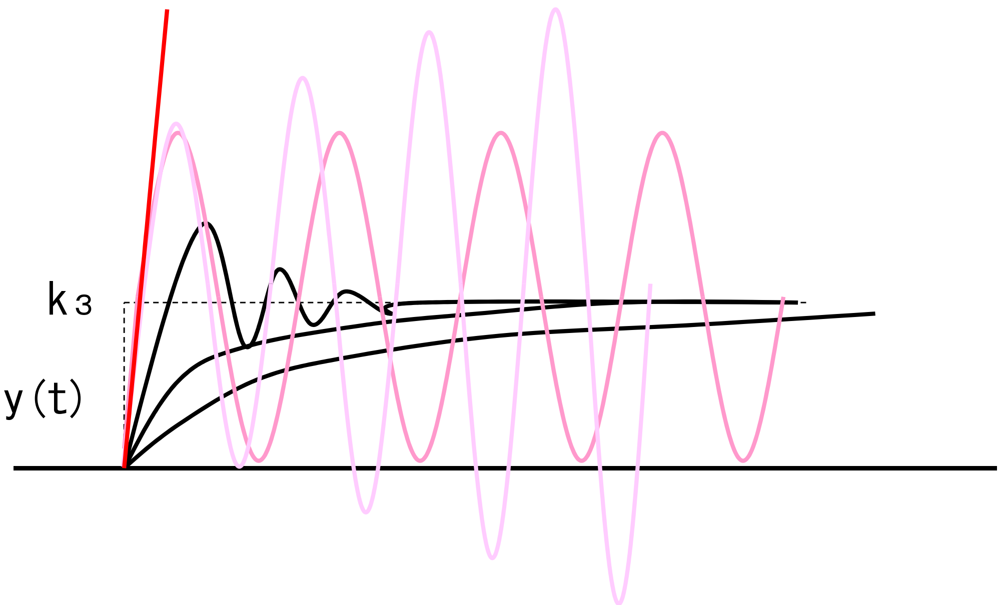
二次遅れ系のステップ応答

このようにζの値によって挙動が異なる

ζ>1	振動せずにk_3に収束・・・安定
ζ=1	振動せずにk_3に収束・・・安定（非振動限界）
0<ζ<1	振動しながらk_3に収束・・・安定
ζ=0	振動し続ける・・・・・・・・不安定限界
-1<ζ<0	振動しながら発散・・・不安定
ζ=-1	振動せずに発散・・・不安定（振動限界）
ζ<-1	振動せずに発散・・・不安定

二次遅れ系のステップ応答

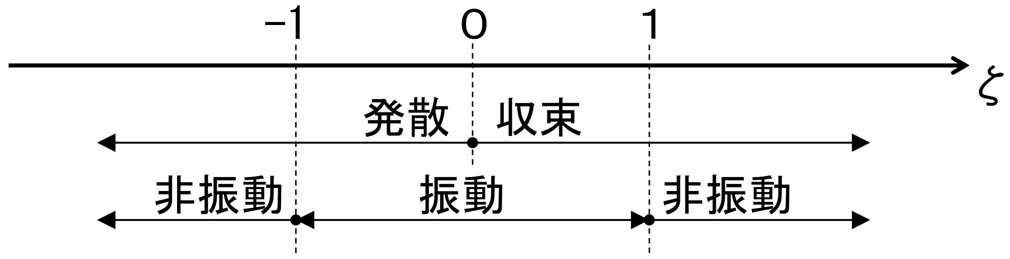
このようにζの値によって挙動が異なる



二次遅れ系のステップ応答

このとき　$\zeta>0$　Kに収束
　　　　　$\zeta=0$　振幅Kの振動
　　　　　$\zeta<0$　発散（無限大）

また　$\zeta>1$、$\zeta<-1$　実数解　（非振動）
　　　$\zeta=1$　重解　（非振動）
　　　$-1<\zeta<1$　虚数解　（振動）



二次遅れ系の別の表現

二次遅れ系の別の式として、以下の様な式がある

$$x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+b\ y(t)+c\int y(t)dt$$

これをラプラス変換すると

$$X(s)=\left(as+b+c\frac{1}{s}\right)Y(s)$$

伝達関数は

$$G(s)=\frac{1}{as+b+c\cdot 1/s}=\frac{s/a}{s^2+b/as+c/a}$$

$$=\frac{\gamma}{s-\alpha}+\frac{\delta}{s-\beta}$$

$$\gamma+\delta=1/a$$
$$\alpha\gamma+\beta\delta=0$$

二次遅れ系の別の表現

よって、

$$G(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

と同じ結果になる。（比例定数が異なるだけ）

二次遅れ系の一般的な表現

一般的な二次遅れ系の伝達関数は

$$G(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ζ：減衰比　、ωn：固有角振動数　、Ｋ：ゲイン定数

で表すことが多い。

これは

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

の出力が１に収束するためである。

一般的に、これをゲイン定数Ｋ倍した式で表している。

二次遅れ系の一般的な表現

二次遅れ系の特性を示すパラメータとして、ζ ω_n、kがある

ζ : 減衰比　、ω_n : 固有角振動数　、k : ゲイン定数

一般的な二次遅れ系の伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{as^2+bs+c} = k\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

この時、

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{(ac)}}$$

$$\omega_n = \sqrt{(c/a)}$$

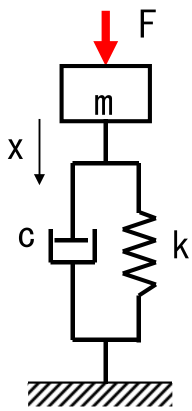
$$k = 1/c$$

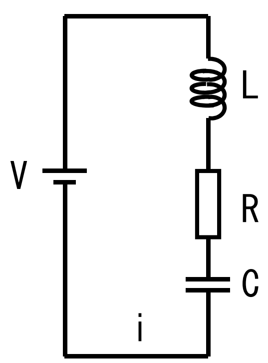
$$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二次遅れ系の例

二次遅れ系の例

$$x(t) = a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + cy(t)$$





F : 力（入力）
x : 変位（出力）

V : 電圧（入力）
i : 電流（出力）

$$m \cdot d^2x/dt^2 + c \cdot dx/dt + kx = F$$

$$L \cdot di/dt + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = V$$

変位と力

流れる電流と電圧

（４）自動制御システムの解析

自動制御システムの特性

自動制御システムの特性を調べるために、

システムを構成する個々の要素の伝達関数を求め
それらの伝達関数を結合

⇩

システムの伝達関数が求められる

実際の自動制御システムで個々の要素の伝達関数を求め、
数学的にシステム全体の伝達関数を求めることは困難

実験的に特定の信号を入力し、そのときの出力を計測して入力と出力の関係を調べる

⇩

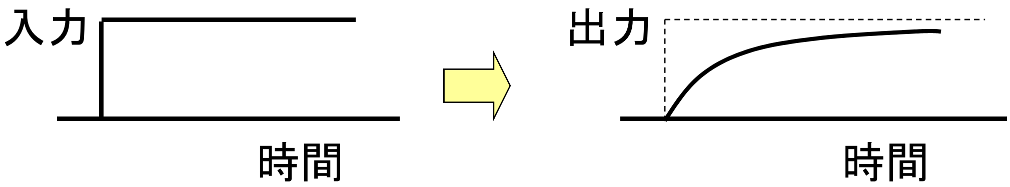
システムの伝達関数が類推できる。

自動制御システムの特性

実際の自動制御システムの特性を調べる方法として

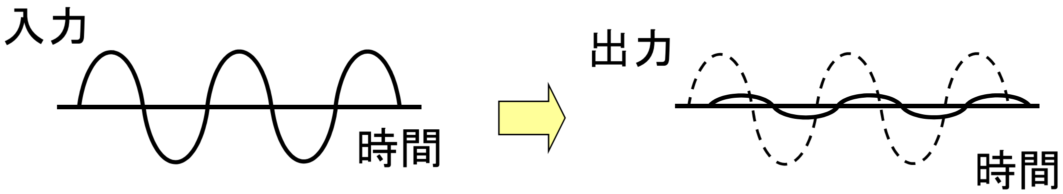
・過渡応答法

・・・ステップ信号などを入力し、出力が定常状態（安定状態）になるまでの挙動を調べる



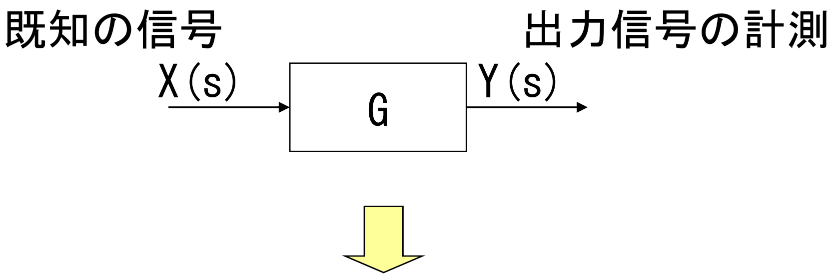
・周波数応答法

・・・正弦波信号を入力し、周波数を変化させたときの出力の挙動を調べる



自動制御システムの特性

これらの方法により、実際の制御システムに信号を入力し、そのときの出力を計測することにより、制御システムの伝達関数を類推する



G(s)＝？？？　　これを類推する

自動制御システムの特性

多くの自動制御システムは一次遅れ系もしくは二次遅れ系で近似できる

一次遅れ系で近似の場合

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

K、T　を求めれば良い

二次遅れ系で近似の場合

$$G(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

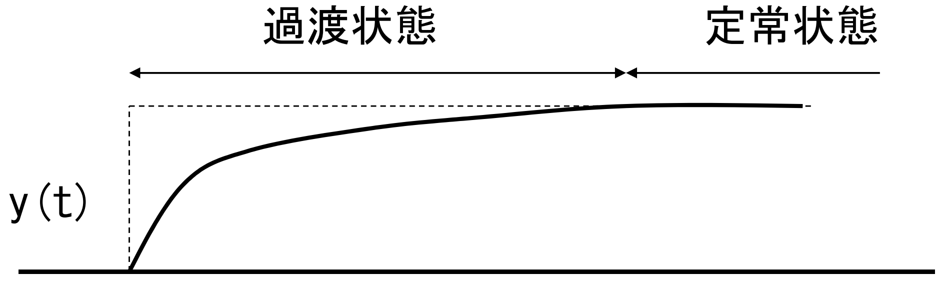
K、ζ、ω_n を求めれば良い

①ステップ応答（過渡応答）

過渡応答

自動制御システムにステップ信号を入力したとき、出力が安定するまで、ある程度の時間を要する

出力が安定するまで・・・過渡状態
出力が安定した後・・・・定常状態

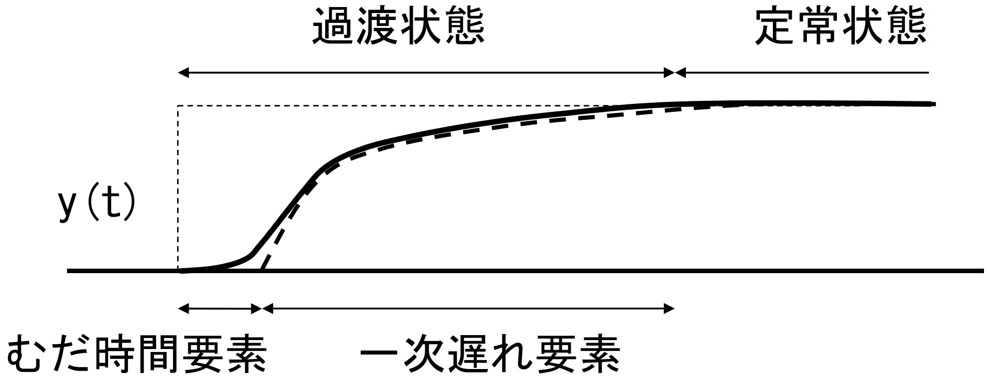


一次遅れ系

過渡状態での出力の挙動で一次遅れ系の伝達関数を類推する

過渡応答

実際の制御システムでは、立ち上がりが遅れる高次送れ系（２次以上）のものもあるが、この場合は１次遅れ要素とむだ時間要素の和として近似することができる。



過渡応答法によるシステムの解析（一次遅れ系）

自動制御システムに単位ステップ信号を入力し、
そのときの出力（インディシャル応答）からシステムの
特性（伝達関数）を求める

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{1+Ts}$$

K：ゲイン定数
T：時定数

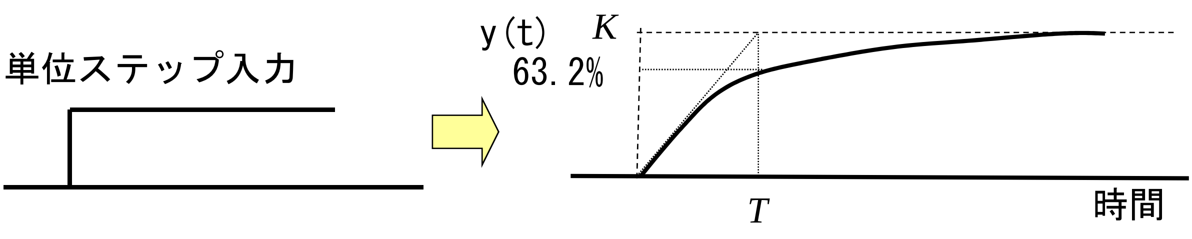
一次遅れ系のインディシャル応答は

$$y(t) = K(1-e^{-t/T})$$

であることから、出力の挙動を測定し、KとTを求めれば良い。

過渡応答法によるシステムの解析（一次遅れ系）

一次遅れ系のインディシャル応答



定常状態になったときの出力から*K*が求められる。

出力が定常状態の63.2%になるまでの時間から*T*が求められる

t=0での接線の傾きが*K/T*になり、１次遅れ系であることが確認できる

過渡応答法によるシステムの解析（二次遅れ系）

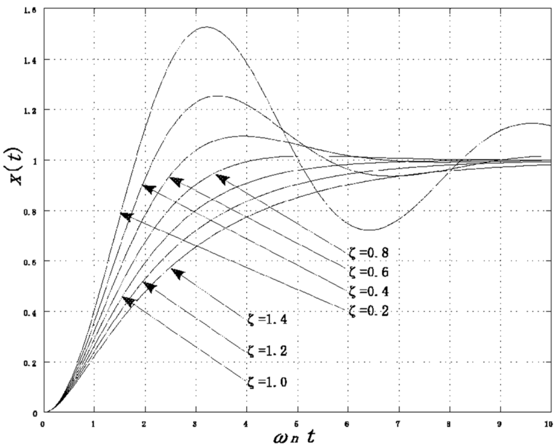
インディシャル応答から２次遅れ系の伝達関数を求める

$$G(s)=K\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

k ：ゲイン定数
ζ：減衰比
ω_n：固有角振動数

このK、ζ、ω_nが分かれば良い。

単位ステップ入力



ζによって挙動が異なる

過渡応答法によるシステムの解析（二次遅れ系）

・ζ=0の場合、振幅K、角振動数ω_nの振動をし続ける
（非減衰振動）

ω_n：非減衰固有角振動数

$\omega_n=\sqrt{c/a}$

・0<ζ<1の場合、角振動数ω_dの振動をしながらKに収束する
（減衰振動）

ω_d：減衰固有角振動数

$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

・ζ>=1の場合、振動しないでKに収束する（Kは超えない）

ζ=1　（臨界減衰）

ζ>1　（過減衰）

過渡応答法によるシステムの解析（二次遅れ系）

特に、0<ξ<1の時

遅れ時間　td

定常状態の50%の所に達するまでの時間

行き過ぎ時間　tp

行き過ぎ量が最大になるまでの時間

立ち上がり時間　tr

目標値の10～90%の時間

整定時間　ts

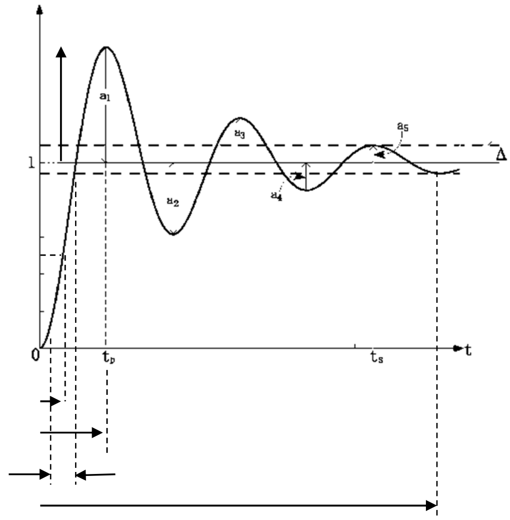
出力が最終値の±5%（または±2%）までの時間

最大行き過ぎ量（オーバーシュート）　a1

行き過ぎの最大値

振幅減衰比

１サイクルごとの振幅の減衰比



過渡応答法によるシステムの解析（二次遅れ系）

最大行き過ぎ量、行き過ぎ時間、振幅減衰比、整定時間からξ、ω_nを求める

最大行き過ぎ量

$$a1 = \exp\left(-\pi\xi / \sqrt{1-\xi^2}\right)$$ ・・・ξが求められる

行き過ぎ時間

$$t_p = \pi / \left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)$$ ・・・ω_nが求められる

振幅減衰比

$$\lambda = \exp\left(-2\pi\xi / \sqrt{1-\xi^2}\right)$$

整定時間

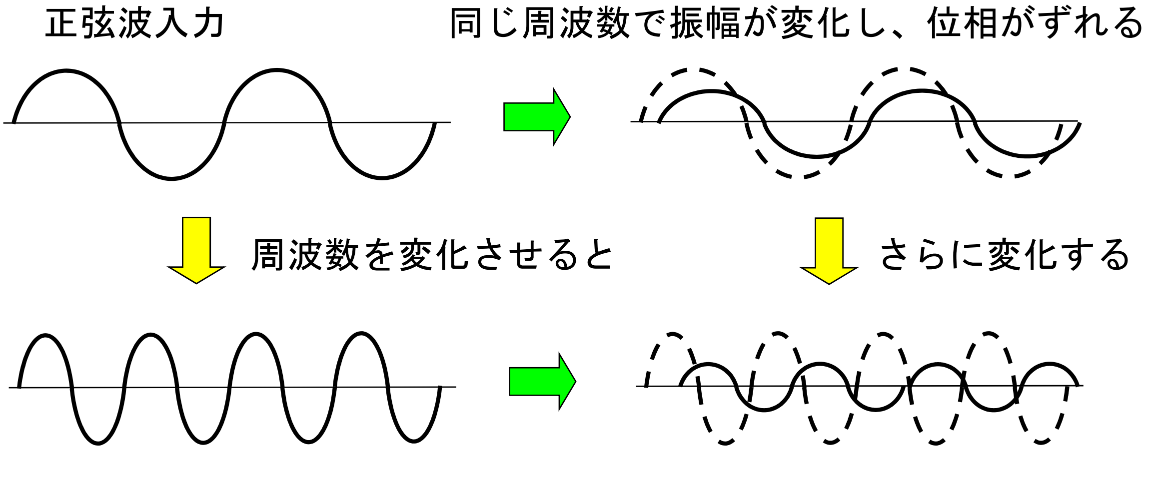
$t_s \fallingdotseq 4/\xi\omega_n$　（⊿＝２％のとき）、

$t_s \fallingdotseq 3/\xi\omega_n$　（⊿＝５％のとき）

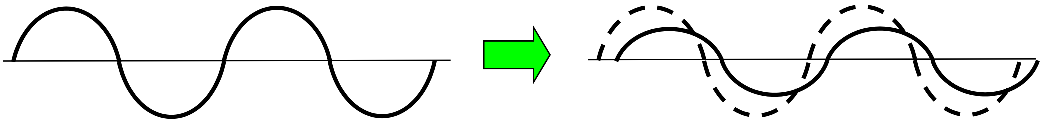
②周波数応答

周波数応答

自動制御システムに正弦波信号を入力したとき、システムの伝達関数によっては、入力に対する出力の特性（振幅、位相のずれ）が変化するものがある。
この特性の変化は、入力する周波数によって挙動が変る。



周波数応答



入力

$x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$

出力

$y(t) = B \cdot \sin(\omega t + \theta)$

$$振幅比 = \frac{B}{A}$$

$$位相差 = \theta$$

周波数（もしくは角周波数ω）の値によって振幅比、位相差が変化する。この度合いを調べる。

角周波数＝角速度

周波数伝達関数

伝達関数にsin曲線（x(t)=Asinωt）を入力する

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

$$= G(s) \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{K1}{s - s1} + \cdots + \frac{Kn}{s - sn} + \frac{C1}{s + j\omega} + \frac{C2}{s - j\omega}$$

ここでのjは虚数単位

これを逆ラプラス変換すると

$$y(t) = K1\,e^{s1\,t} + \cdots + K1\,e^{s1\,t} + C1\,e^{j\omega t} + C2\,e^{-j\omega t}$$

$$= \cdots \text{［省略］}$$

$$= A\,|G(j\omega)|\sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

周波数伝達関数

このように、出力は伝達関数G(s)の s を jω で置き換えた式で表すことが出来る。

G(*jω*)：周波数伝達関数

一般的に、周波数伝達関数は

$$G(j\omega)=\alpha+j\beta$$

とあらわすことができる。　　α、βは実数

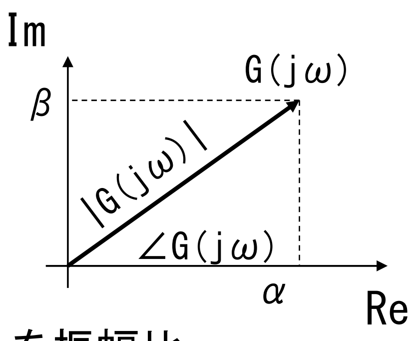
周波数伝達関数

$G(j\omega)=\alpha+j\beta$ を複素数平面で表すと

$$|G(j\omega)|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\angle G(j\omega)=\tan^{-1}(\beta/\alpha)$$

となる。



$|G(j\omega)|$(＝出力の振幅/入力の振幅)を振幅比
また、g=20log$|G(j\omega)|$ をゲインという

$\angle G(j\omega)$)（入力に対する出力の位相のずれ)を位相差という

α、βがω（角周波数）の関数であれば、 α
ωが変化すると振幅比や位相差が変化する。

周波数特性を表す線図

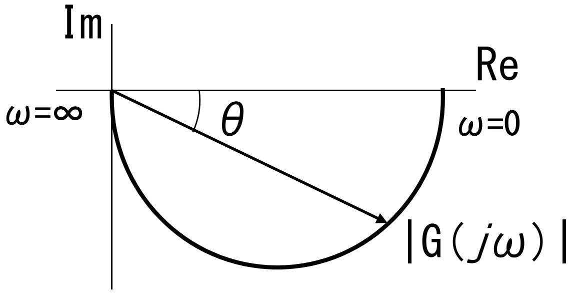
周波数特性（周波数の変化に対する振幅比もしくはゲイン、位相差の変化）を表す線図として

①ベクトル軌跡
　入力の周波数の変化に対し、振幅比および位相の
　ずれを極座標系で表す

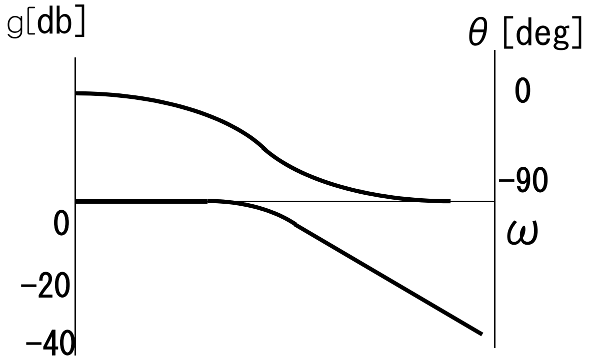
②ボード線図
　入力の周波数を横軸に、ゲインおよび
　位相のずれ縦軸にとり、片対数グラフで表す

③ゲイン・位相図
　入力の周波数の変化に対し、縦軸にゲイン、横軸に
　位相のずれをとり、グラフで表す

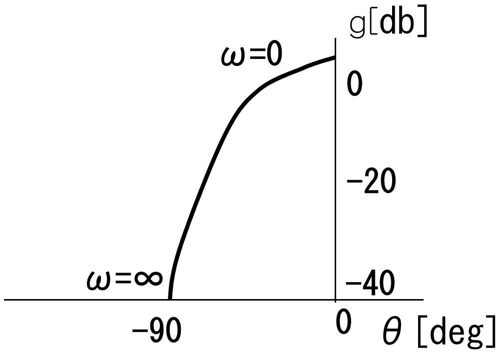
周波数特性を表す線図



ベクトル軌跡



ボード線図

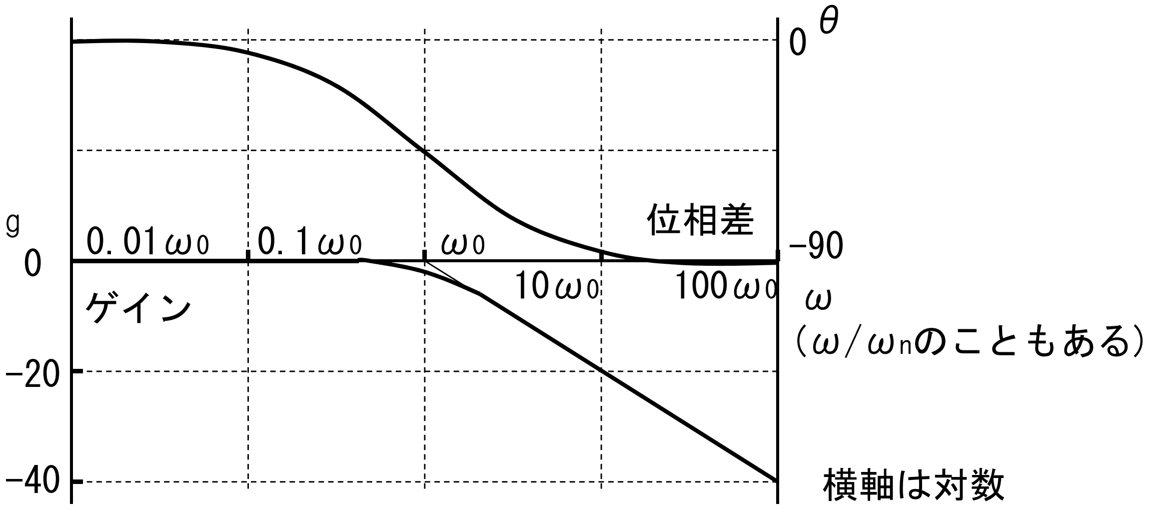


ゲイン・位相図

＊他に、ナイキスト線図や
　ニコルス線図も使われる。

ボード線図

自動制御システムの動作を示す図。
周波数の変化によって、振幅比（ゲイン）、位相差がどのように変化するか。

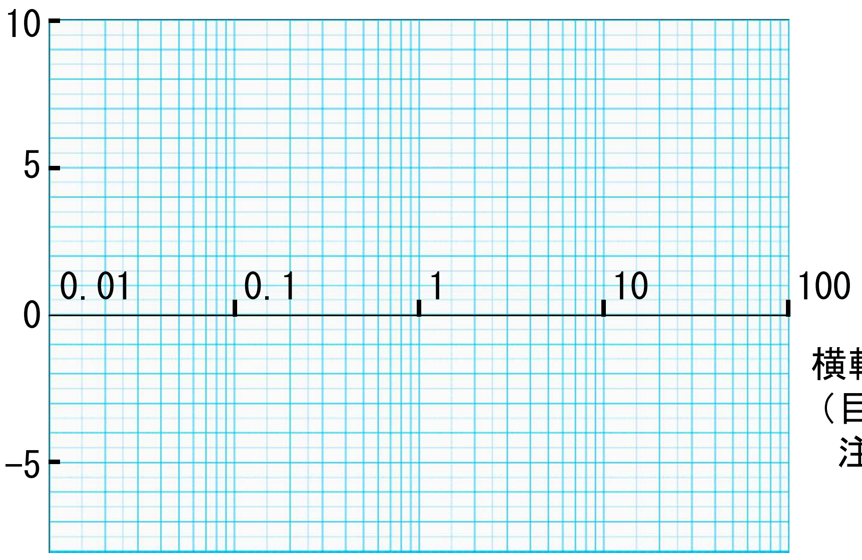


時間

参考：片対数グラフ

片対数グラフの特徴を示す

縦軸は常数

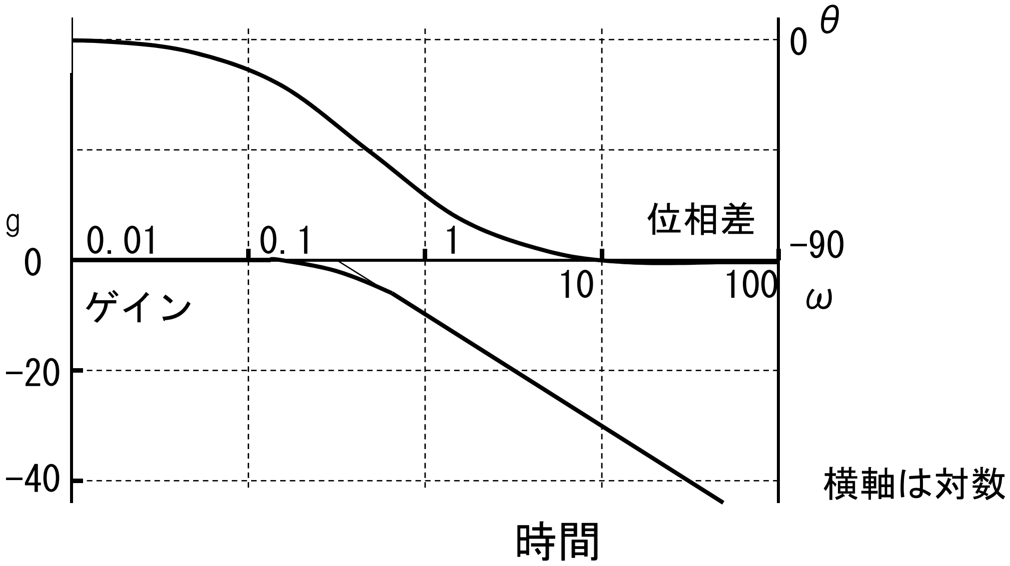


横軸は対数
（目盛の間隔に
注意）

log0.01=-2、log0.1=-1、log1=0、 log10=1、log100=2

ボード線図によるシステムの解析

自動制御システムに正弦波を入力し、そのときの出力（振幅比（ゲイン）と位相差）からボード線図を作成し、ここから伝達関数のK、T（一次遅れ系）、もしくはK、ζ、ω_n （二次遅れ系）、などを求める。



一次遅れ系のボード線図

一次遅れ系のボード線図を求める。ゲインは

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T} = \frac{K}{1+(\omega T)^2}(1-j\omega T)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{1+(\omega T)^2}\sqrt{1+(\omega T)^2}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} = K(1+(\omega T)^2)^{-1/2}$$

よって、

$$g(\omega) = 20\log(G(j\omega) = 20\log(K(1+(\omega T)^2)^{-1/2})$$

$$= 20\log K - 10\log(1+(\omega T)^2)$$

これは、$g(\omega) = -10\log(1+(\omega T)^2)$ のグラフを20logKだけ上下に平行移動させたグラフになる。

一次遅れ系のボード線図

位相差は

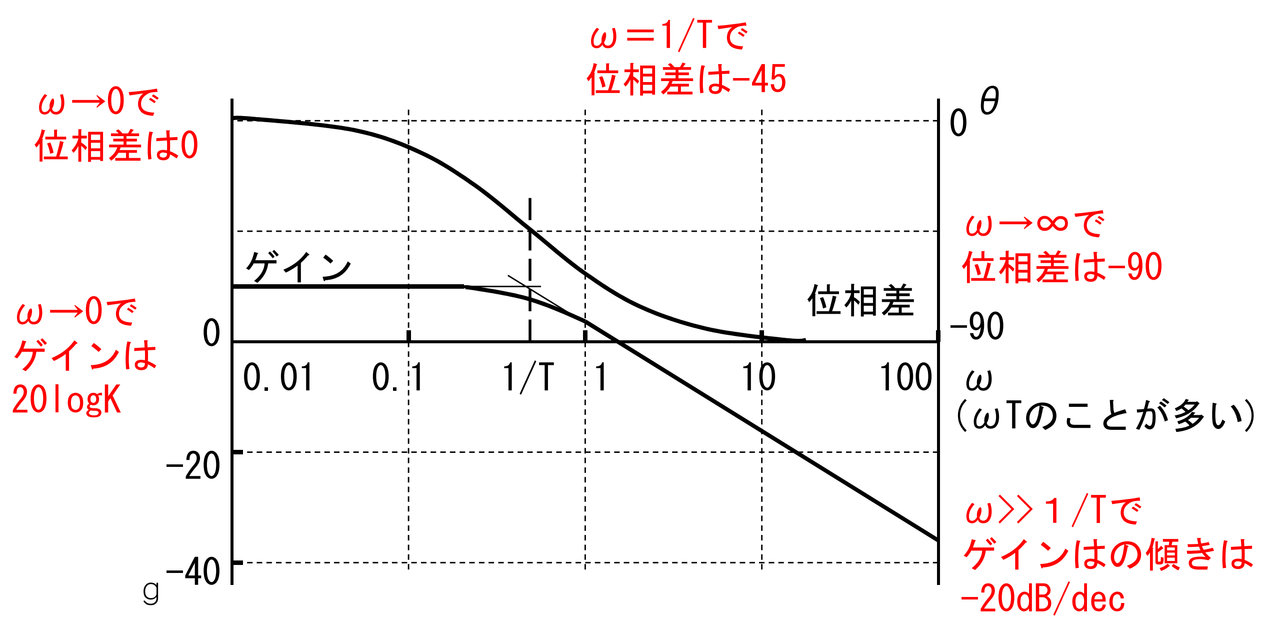
$$G(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega T}=\frac{K}{1+(\omega T)^2}(1-j\omega T)$$

$$\angle G(j\omega)=\tan^{-1}(-\omega T/1)\ =\tan^{-1}(-\omega T)$$

$\omega\to 0$で$\theta\to 0$、$\omega=1/T$で$\theta=-45$、$\omega\to\infty$で$\theta\to -90$
（位相差の単位は[deg]）

一次遅れ系のボード線図

一次遅れ系のボード線図は以下のようになる



ω＝1/Tで
ゲインは約20logK-3　　∵10log(2)=3

一次遅れ系のボード線図

ボード線図から以下のことを知ることが出来る

$\omega \to \infty$で位相差が-90deg、　$\omega \to 0$で位相差が0deg
及び$\omega \gg 1/T$でゲインの傾きが-20dB/dec　となることから
　→　一次遅れ系と判断できる

位相差が-45deg となる角周波数ω 、
及びゲインが約20logK-3となる角周波数ωから、
　→　時定数 Tを求めることができる　　　　$T = 1/\omega$

$\omega \to 0$でゲインは$g = 20\log K$となることから、
　→ ゲイン定数 Kを求めることができる　　　$K = 10^{0.05g}$

システムの伝達関数を求めることが出来る

二次遅れ系のボード線図

二次遅れ系のボード線図を求める。ゲインは

$$G(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ただし、$\zeta = b/2\sqrt{ac}$ 、$\omega_n = \sqrt{c/a}$ 、$K = 1/\sqrt{ac}$

$$G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2}$$

$$= \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j\,2\zeta\omega_n\omega}$$

$$= \frac{K\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2 - j\,2\zeta\omega_n\omega)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}$$

二次遅れ系のボード線図

$$|G(j\omega)| = \frac{K\omega_n^2 \sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}$$

$$= K\omega_n^2((\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2)^{-1/2}$$

よって、ゲインは

$$g(\omega) = 20\log(G(j\omega))$$

$$= 20\log K\omega_n^2 - 10\log((\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2)$$

二次遅れ系のボード線図

$\omega\to 0$のとき

$$g(\omega) \fallingdotseq 20\log K\omega_n^2 - 10\log((\omega_n^2)^2)$$

$$g_0 = 20\log K + 20\log\omega_n^2 - 20\log(\omega_n^2)$$

$$= 20\log K$$

$\omega=\omega n$のとき

$$g(\omega) \fallingdotseq 20\log K\omega_n^2 - 10\log((2\zeta\omega_n^2)^2)$$

$$g_n = 20\log K + 20\log\omega_n^2 - 20\log(2\zeta\omega_n^2)$$

$$= 20\log K - 20\log(2\zeta)$$

$$= 20\log K + 20\log(1/2\zeta)$$

$\omega \gg \omega n$のとき

$$g(\omega) \fallingdotseq 20\log K\omega_n^2 - 10\log((\omega^2)^2)$$

$$= 20\log K + 20\log\omega_n^2 - 20\log(\omega^2)$$

$$= 20\log K + 20\log\omega_n^2 - 40\log(\omega)$$

二次遅れ系のボード線図

位相差は

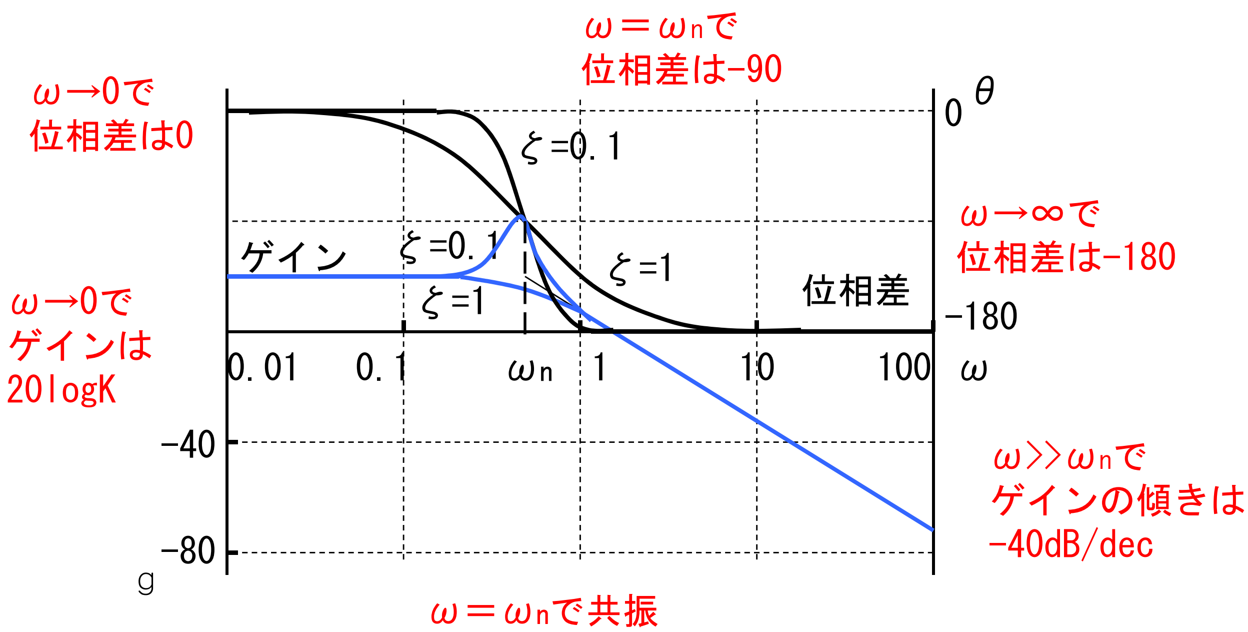
$$G(j\omega)=\frac{K(\omega_n^2-\omega^2-j2\zeta\omega_n\omega)}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}$$

$$\angle G(j\omega)=\tan^{-1}(2\zeta\omega_n\omega/(\omega_n^2-\omega^2))$$

$\omega\to0$で$\theta\to0$、$\omega=\omega_n$で$\theta=-90$、$\omega\to\infty$で$\theta\to-180$
（位相差の単位は[deg]）

二次遅れ系のボード線図

二次遅れ系のボード線図は以下のようになる



二次遅れ系のボード線図

ボード線図から以下のことを知ることが出来る

$\omega \to \infty$で位相差が-180deg
及び$\omega \gg \omega_n$でゲインが-40dB/dec　となることから
→　二次遅れ系と判断できる

位相差が-90deg となる角周波数ωから
→固有角振動数ω_nを求めることが出来る。　　$\omega_n = \omega$

$\omega \to 0$でゲインg_0は$g_0 = 20\log K$　となることから
→ゲイン定数Kを求めることができる　　$K = 10^{0.05 g_0}$

$\omega = \omega_n$でのゲインg_nの値から
→減衰比ζを求めることができる　　$\zeta = -10^{\frac{1}{2} 0.05 (g_0 - g_n)}$

システムの伝達関数を求めることができる

実験的方法による制御システムの解析

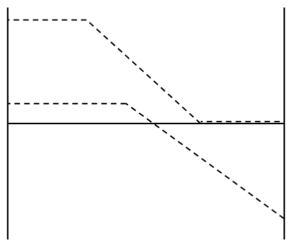
① 入力信号の周波数ωを変化させながら、出力信号を測定する、

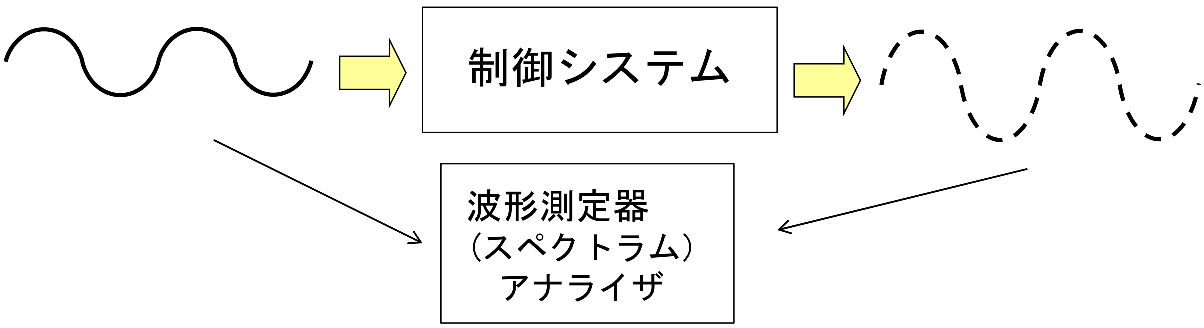
② それぞれの振幅 a, b からゲインを求める　　$g = 20\log(b/a)$

③ 入力信号と出力信号の位相差θを求める

④ 周波数に対するゲイン、位相差をプロットし、ボード線図を作成する

⑤ ボード線図から伝達関数を推測する





（５）自動制御システムの改善

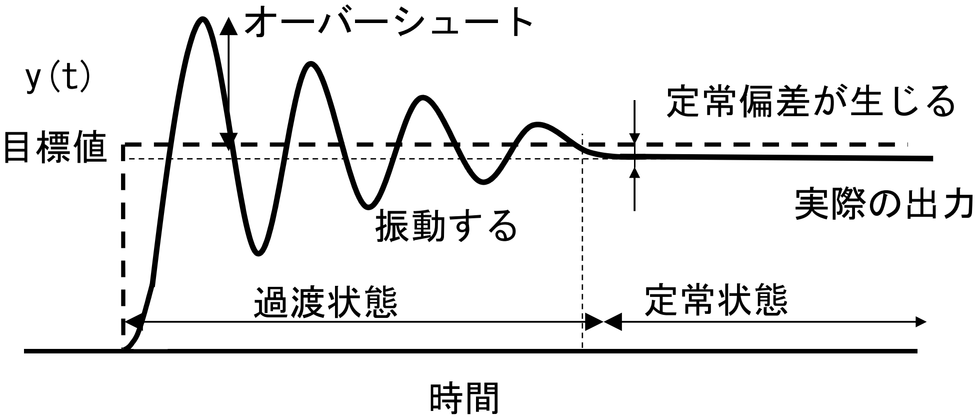
システムの改善

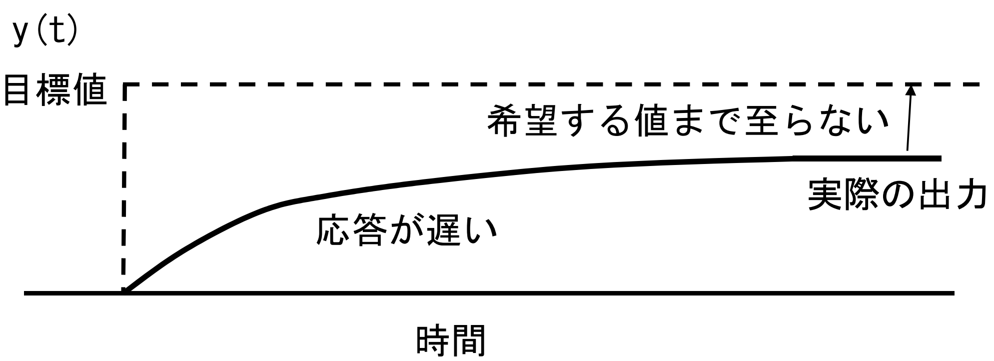
実験的に制御システムの特性を調べた後、システムを改善することがある。

通常の応答では、出力が定常状態になっても、
　希望する目標値と一致しない、
　本来の目標値まで至らない（定常偏差が生じる）
　立ち上がりの時間が遅い
　振動が生じる
などの問題がある。

これらを改善する・・・どのように？？？
　出力の特性（挙動）から、入力信号を作り変える

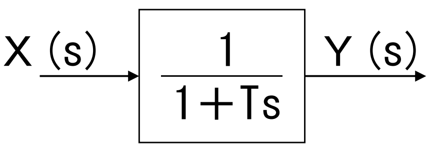
システムの問題点





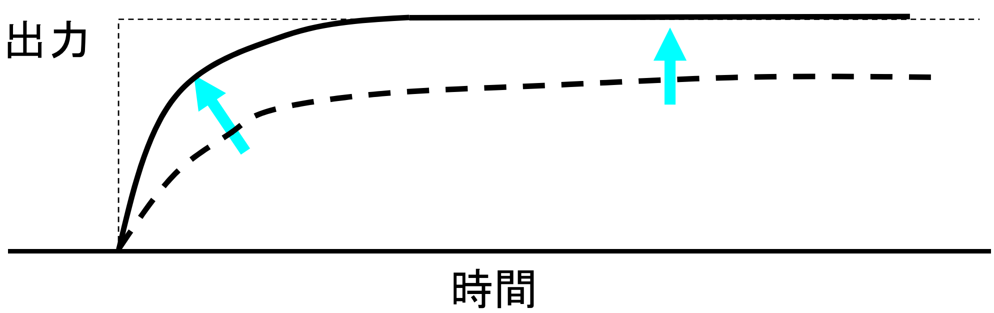
応答の改善(一次遅れ系の改善)

1次遅れ系の場合



比例ゲインを調節する（ゲイン調節）・・・目標値に近づく
時定数を小さくする・・・立ち上がりが改善される

$$Y(s)=\frac{Kp}{1+T's}X(s)$$

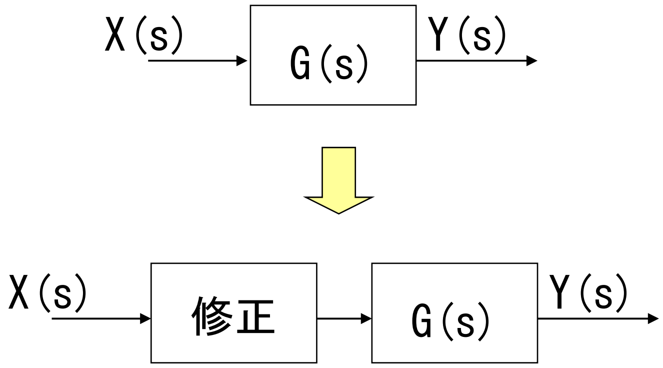


応答の改善（二次遅れ系の改善）

システムへの入力信号にP要素、I要素、D要素を加え、出力が理想通りになるように制御する

Ｐ要素（比例要素）･･･出力の大きさを変える
Ｉ要素（積分要素）･･･定常偏差を小さくする
Ｄ要素（微分要素）･･･立ち上がりを早くする

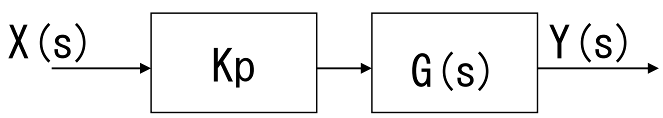
} PID制御



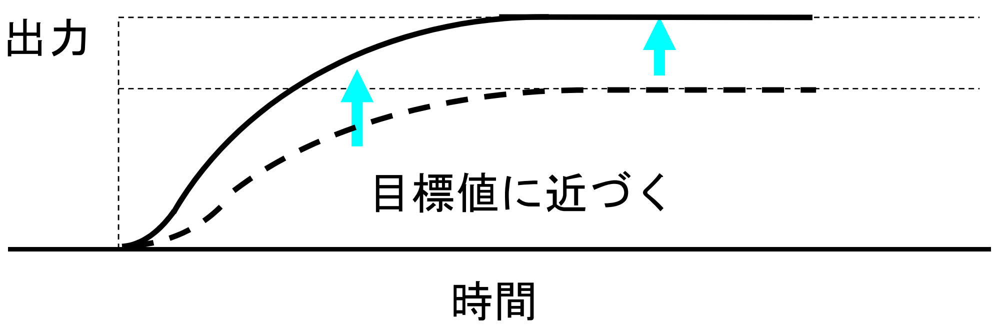
応答の改善（P制御）

目標値とのずれを改善するために（偏差ではない）

比例要素を加える ・・・Ｐ制御



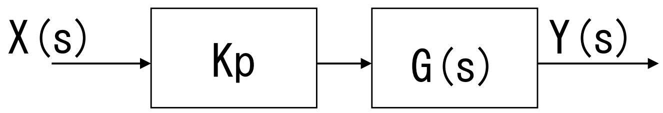
$$Y(s)= Kp\cdot X(s)\cdot G(s)$$



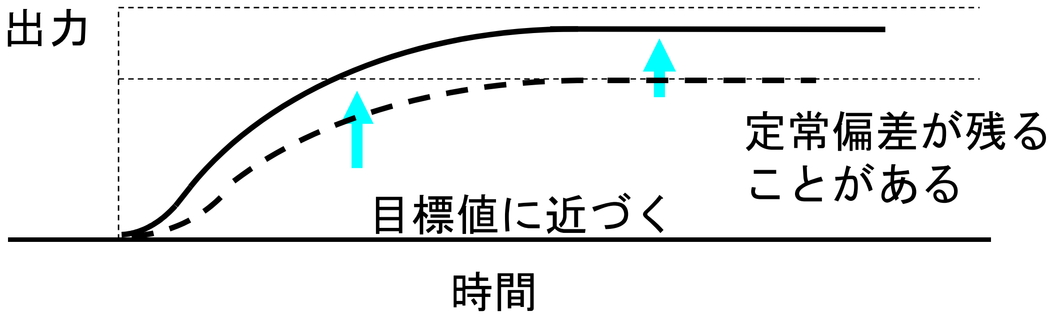
応答の改善(P制御)

目標値とのずれを改善するために（偏差ではない）

比例要素を加える　　　　　　　　　・・・P制御



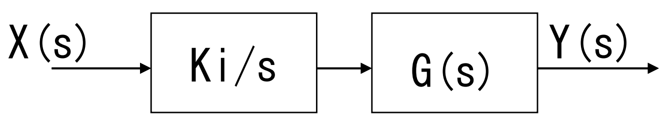
Y(s)= Kp・ X(s)・G(s)



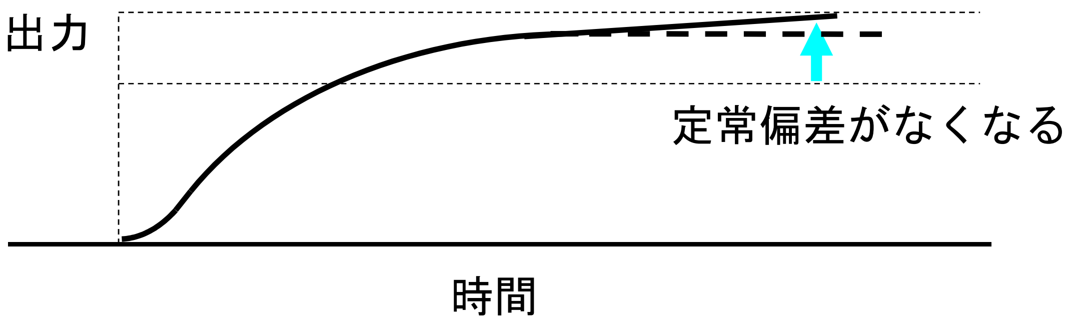
応答の改善(I制御)

目標値との偏差をなくすために

積分要素を加える　　　　　　　　　・・・I制御



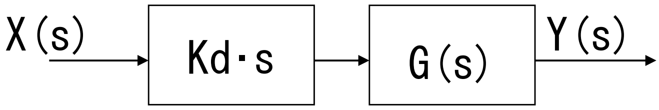
Y(s)=X(s)・Ki/s・G(s)



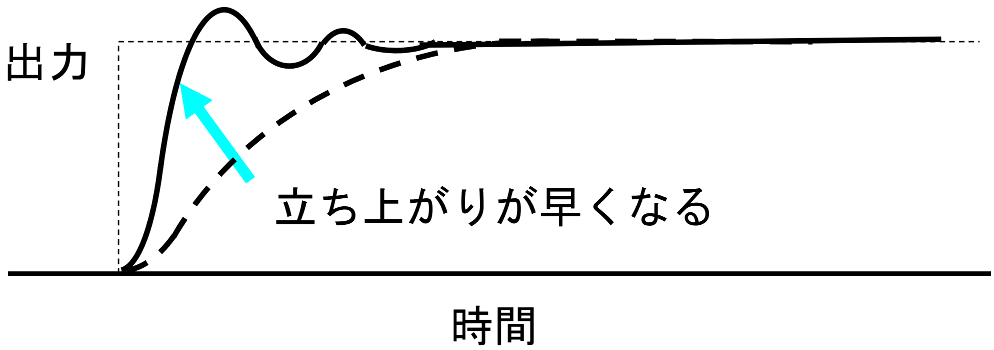
応答の改善（D制御）

立ち上がりを改善するために

微分要素を加える　　　　　・・・D制御

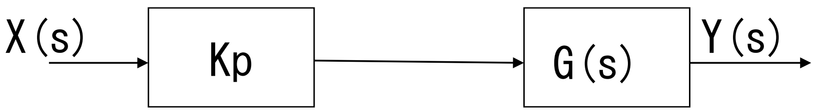


$$Y(s)=X(s)\cdot Kd\cdot s\cdot G(s)$$

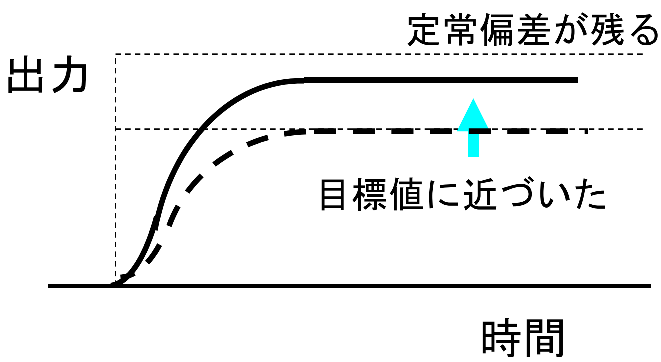


実際の改善（P制御）

1) 比例要素を加えて目標値とのずれを改善する　　P制御

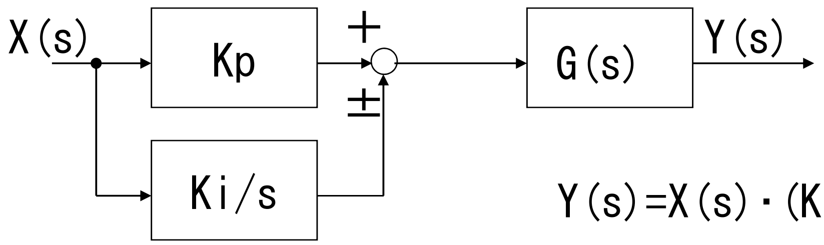


$$Y(s)=X(s)\cdot Kp\cdot G(s)$$

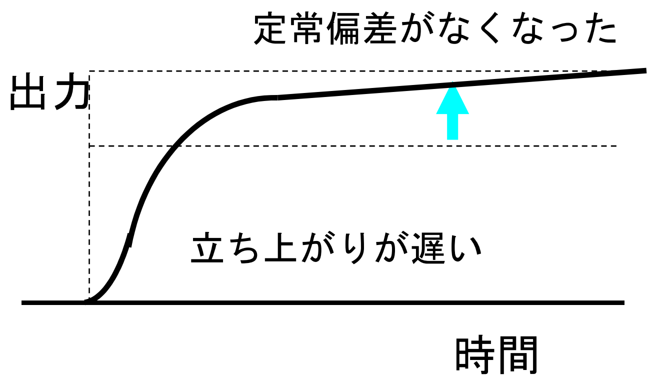


実際の改善(PI制御)

2) さらに積分要素を加えて偏差をなくす　　PI制御

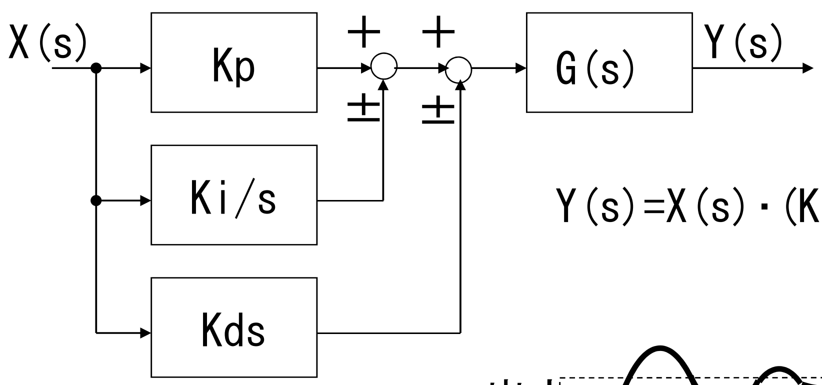


Y(s)=X(s)・(Kp+Ki/s)・G(s)

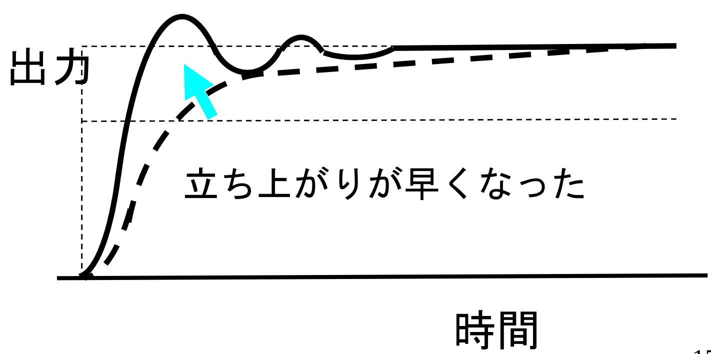


実際の改善(PID制御)

3) さらに微分要素を加えて立ち上がりを早くする　　PID制御

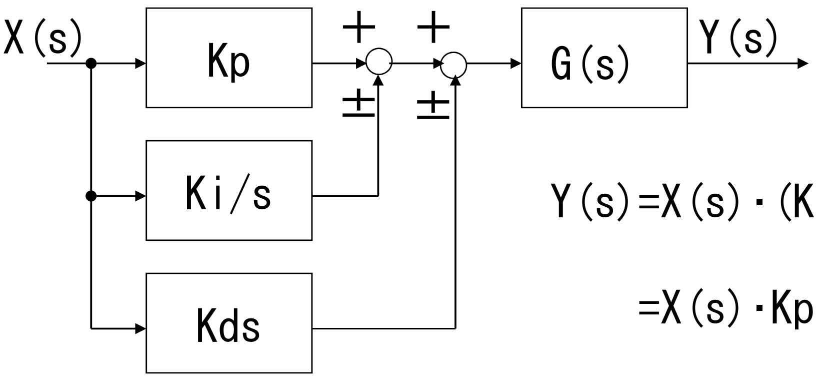


Y(s)=X(s)・(Kp+Ki/s+Kds)・G(s)



実際の改善（PID制御）

ここで、



$$Y(s)=X(s)\cdot(Kp+Ki/s+Kds)\cdot G(s)$$

$$=X(s)\cdot Kp\left(1+\frac{1}{Tis}+Tds\right)\cdot G(s)$$

このときの
　Ti = Kp/Ki・・・積分時間
　Td = Kd/Kp・・・微分時間
という

PID制御

このように、入力信号に比例要素、微分要素、積分要素を加えたものをシステムに入力し、出力の応答を改善する制御方法を、PID制御という。

$$u(t) = kp\, x(t) + ki \int x(t)\,\mathrm{d}t + kd\,\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

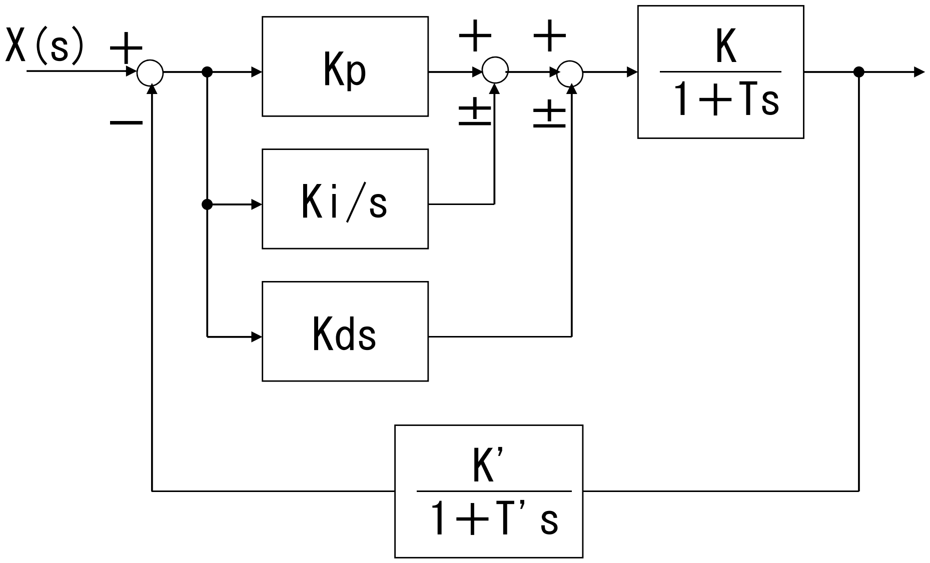
$$= kp \left\{ x(t) + \frac{1}{\mathrm{T_i}} \int x(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{T_d}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \right\}$$

このときの kp を比例ゲイン、kiを積分ゲイン、kd を微分ゲインという。また、$\mathrm{T_i} = kp / ki$ を積分時間、$\mathrm{T_d} = kd / kp$ を微分時間という。

この kp 、$\mathrm{T_i}$ 、$\mathrm{T_d}$ を適切に設定することにより、制御システムを改善することができる。

応答の改善

実際は、これにフィードバック制御がなされているため、
もっと複雑な計算が必要になる



おわりに

ここまでの中で、自動制御システムについての概略を説明した。機械系学生の一般教養として、ここまでのことが漠然とであっても理解できれば十分である。

このあとは、システムの安定判別があるが、さらに難易度が上がるため省略する。今後の就職先での業務で必要になった場合は、自学自習して頂きたい。